INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Gränsvärden 2015
Uppgifter 5 A och L

Uppgifter för början av veckan A1, A2, A3, A4 och A5

A1 Utred med hjälp av kursens kunskaper om talföljders gränsvärden uttrycket

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+5n+7}.$$

A2 Utred med hjälp av kursens kunskaper om talföljders gränsvärden uttrycket

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5n+7}.$$

A3 Bevisa noggrant med hjälp av Bernoullis olikhet att

$$\frac{1}{3^n} \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

(Bernoullis olikhet behandlas i Exempel 1.4.5 i kursboken.)

A4: Att fundera på tillsammans under handledningen. Definitionen på talföljders gränsvärden kan med hjälp av kvantorer kort skrivas som

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N}_1 \forall n > K : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Vad säger följande variationer om talföljden (x_n):
(a) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \forall \varepsilon > 0 \forall n > K : |x_n - a| < \varepsilon$;
(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \exists \varepsilon > 0 \forall n > K : |x_n - a| < \varepsilon$.

A5: Att fundera på tillsammans under handledningen. Vi undersöker talföljden (x_n) för vilken gäller att $x_1 = 1$ och som för alla $n \in \mathbb{N}_1$

satisfierar ekvationen $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Vi begrundar denna följds konvergens och möjliga gränsvärde. Vad tror du om följande slutledning?

Vi påstår att $x_n \to x$ då $n \to \infty$. Vi tillämpar Sats 2.2.8 i kursboken. Utgående från denna gäller då att $2x_n+1 \to 2x+1$ då $n \to \infty$. Å andra sidan gäller säkert att $x_{n+1} \to x$ då $n \to \infty$. Vi får alltså ekvationen $x = 2x + 1$, med lösningen $x = -1$. Talföljden konvergerar alltså och har gränsvärdet -1.

Uppgifter för slutet av veckan L1, L2, L3, L4 och L5

L1 Anta att $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ och $a = \sup A$. Vi betecknar $B = \{-x | x \in A\}$. Bevisa noggrant att $\inf B \in \mathbb{R}$ existerar och att $\inf B = -a$. (Repetera infimums definition i kursboken.)

L2 Anta att följden (x_n) konvergerar. Visa att

$$\frac{(x_n)^{42}}{\sqrt{n}} \to 0$$

då $n \to \infty$. I uppgiften har man nytta av kunskapen att konvergerande talföljder är begränsade.

L3 Anta att $(x_n) \to a$ då $n \to \infty$ och att $a \neq 0$. Visa att det existerar ett sådant $K \in \mathbb{N}_1$ att för alla $n > K$ gäller

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

En möjlighet är att skilt undersöka fallen $a > 0$ och $a < 0$. En bild kan vara till stor hjälp!

L4: Att fundera på tillsammans under handledningen. Anta att talföljderna (x_n) och (y_n) uppfyller följande villkor:
(i) $y_n \to a$ då $n \to \infty$,
(ii) (x_n) är växande och
(iii) $x_n \leq y_n$ för alla n.
Visa att
(iv) $x_n \leq a + 1$ för alla n och att
(v) (x_n) konvergerar.

L5: Att fundera på tillsammans under handledningen. Vi undersöker talföljden (x_n), där $x_1 = 2$ och

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

$n \in \mathbb{N}_1$. Visa att $x_n \to \sqrt{2}$ då $n \to \infty$. (Jämför med exempel från föreläsningen.)

Tilläggsfråga för dem som vill ha en extra utmaning. Talföljden i uppgiften har ett tydligt samband med Newtons metod. Hittar du en ”besläktad”följd med gränsvärdet $\sqrt[3]{2}$, vars konvergens du kan bevisa? (Gymnasiekunskaper om Newtons metod duger inte som bevis!)