INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Gränsvärden 2015
Uppgifter 3 A och L

Uppgifter för början av veckan A1, A2, A3, A4 och A5

A1: Att fundera på tillsammans under handledningen. I den här uppgiften antas det vara känt att $|x-y|$ är ett uttryck för avståndet mellan x och y. Bestäm utgående från detta ekvationens
(a) $|x-2| = |x-4|$,
(b) $2|x-2| = |x+4|$
lösning. I denna uppgift behöver man inte motivera svaret utgående från absolutbeloppets exakta definition.

A2: Att fundera på tillsammans under handledningen.
Bevisa noggrant utgående från absolutbeloppets definition att
(a) för alla x gäller $|x| \geq 0$,
(b) för alla x och y gäller $|xy| = |x||y|$.

A3 Bestäm noggrant med hjälp av absolutbeloppslemmat vilka reella tal som uppfyller olikheten $|x-3| < 2$. (I denna uppgift tillämpas lemmat på formen $|x| < a$ om och endast om $-a < x < a$.)

A4 Vi undersöker uttrycket $x^2 - 1$ då $|x-1| < 1$. Visa att för alla x vi undersöker gäller $|x^2 - 1| \leq 3|x-1|$.

A5 Tillämpa resultatet från föregående uppgift. Vad vet vi utgående från det om avståndet $|x^2 - 1|$ om vi vet att $|x-1| < 3^{-7777}$?

Uppgifter för slutet av veckan L1, L2, L3, L4 och L5

L1: Att fundera på tillsammans under handledningen. Visa att villkoren (i) och (ii) är ekvivalenta för alla reella tal a och b.
(i) $a = b$.
(ii) För alla $\varepsilon > 0$ gäller $|a-b| < \varepsilon$.

L2 Anta att det reella talet x uppfyller villkoret $|x-1| < 2$ och $|x-4| <$

3. Visa att x då uppfyller kravet $|x-2|<1$. Det lönar sig att använda absolutbeloppslemmat.

L3 Visa att för alla heltal $n = 1, 2, \ldots$ gäller

$$\left|\frac{3n-1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{2}{n}.$$

L4 Anta att $n > 2^{7777}$. Vad vet du då utgående från föregående uppgift om avståndet

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right|?$$

L5: Att fundera på tillsammans under handledningen. Vad är Bernoullis olikhet? Hur bevisas den? Svaret hittas genom att tillsammans söka i boken.