INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Gränsvärden 2015
Uppgifter 2 A och L

Uppgifter för början av veckan A1, A2, A3, A4 och A5

A1 Att fundera på tillsammans under handledningen: Inversen y till det reella talet x är ett sådant entydigt reellt tal att $xy = 1$. Varför har inte talet 0 en invers - varför får man inte dividera med noll?

A2 Vi undersöker uttrycket

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n},$$

där $n = 1, 2, 3, \ldots$. Låt täljaren växa och nämnaren krympa på så vis, att du hittar positiva heltal a och b för vilka, enligt kursens kunskaper, gäller att

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n} \leq \frac{a}{b}$$

för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

A3 Sök ett sådant positivt heltal K, att för alla reella x gäller: om $2 < x < 3$ så $x^2 - 4 \leq K(x - 2)$. Tips: skriv $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ och låt den första faktorn växa enligt $2 < x < 3$.

A4 Fortsättning på föregående uppgift. Sök ett positivt reellt tal δ som är så litet att vi utgående från kravet $2 < x < 2 + \delta$ kan dra slutsatsen

$$4 < x^2 < 4 + 42^{-(42^{42})}.$$

A5 Att fundera på tillsammans under handledningen: Fortsättning på de två föregående uppgifterna. Anta att ε är ett positivt reellt tal. Existerar det ett sådant positivt reellt tal δ att vi utgående från $2 < x < 2+\delta$ kan dra slutsatsen

$$4 < x^2 < 4 + \varepsilon?$$

Uppgifter för slutet av veckan L1, L2, L3, L4 och L5

L1 Att fundera på tillsammans under handledningen: I exempel 1.2.9. i kursboken visas det att talet $\sqrt{2}$ är irrationellt. Omformulera slutledningen och visa att talet $\sqrt[5]{3}$ är irrationellt. (Du kan till skillnad från hur boken gör i detta skede använda vanliga potensbeteckningar.)

L2 Att fundera på tillsammans under handledningen:
(a) Anta att $0 < x < y$. Visa att $x^2 < y^2$.
(b) Anta att $1 < x$. Visa att $x^2 < x^5$.
(c) Anta att $0 < x < 1$. Visa att $x^5 < x^2$.

L3 Vi betraktar uttrycket

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n}$$

från uppgift A2, där $n = 1, 2, 3, \ldots$. Förminska täljaren och låt nämnaren växa på så vis, att du hittar positiva heltal c och d för vilka, enligt kursens kunskaper, gäller att

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n} \geq \frac{c}{d}$$

för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

L4 Visa att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\frac{2n + 5}{n + 1} > 2.$$

L5 Betrakta differensen

$$\frac{2n + 5}{n + 1} - 2$$

och sök ett sådant tal a, att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ som uppfyller kravet $n > a$ gäller att

$$\frac{2n + 5}{n + 1} < 2 + 10^{-1000}.$$