HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl
Hem- och handledningsuppgifter 5A
23.–24.11.2015

Hemuppgifter 5A

1. Bestäm sådana konstanter a och b att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{då } x \leq 2, \\ x^2 - 6x + 9 + a, & \text{då } x > 2, \end{cases}$$

och dess derivatafunktion f' är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}$. Rita en bild av funktionens graf.

2. (HKK Uppgift 5.2.17) Bevisa Sats 5.2.1(b).

Sats 5.2.1(b): Låt $f, g : A \to \mathbb{R}$ vara funktioner som är deriverbara i punkten $x_0 \in A$. Då är funktionen $f + g : A \to \mathbb{R}$ deriverbar i punkten x_0 och

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Bekanta dig med den *allmänna exponentialfunktionens* definition i kapitel 6.3 i kursboken, sidorna 131-133.

3. (HKK Uppgift 6.3.6) Låt $a > 0$. Visa att $a^{x+y} = a^x a^y$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

Handledningsuppgifter 5A

1. Anta att $f(0) = 0$ och $f'(0) = 1$. Visa att det existerar ett sådant $h > 0$ att

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < \frac{3}{2}, \qquad \text{då } 0 < |x| < h.$$

Bekanta er med den *allmänna logaritmfunktionens* definition i kursbokens kapitel 6.3, sidorna 131-133.

2. (HKK Uppgift 6.3.8 början) Låt $a > 0$. Visa att för alla $x \in (0, \infty)$ gäller

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl
Hem- och handledningsuppgifter 5L
26.–27.11.2015

Hemuppgifter 5L

1. Bestäm derivatan av funktionerna

$$f(x) = (x^2+1)(x^3+3) \qquad \text{och} \qquad g(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$$

i punkten $x = -2$ med hjälp av deriveringsreglerna för produkt och kvot.

2. (HKK Uppgift 5.2.20) Visa att $\mathrm{D}_x \cos x = -\sin x$.

Bekanta dig med den *allmänna potensfunktionens* definition i kursbokens kapitel 6.3, sidorna 133-134.

3. (HKK Uppgift 6.3.9) Bevisa Sats 6.3.5(a).

SATS 6.3.5(A): Låt $\mu \in \mathbb{R}$. Då är $x \mapsto x^\mu$ en kontinuerlig funktion $(0, \infty) \to (0, \infty)$.

Handledningsuppgifter 5L

1. Visa att om funktionerna f_i, $i = 1, \ldots, n$, har derivatorna $f_i'(x_0)$ i punkten x_0 så har produkten $f_1 f_2 \cdots f_n$ derivatan

$$f_1(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n'(x_0) + f_1(x_0)\cdots f_{n-2}f_{n-1}'(x_0)f_n(x_0) + \ldots + f_1'(x_0)f_2(x_0)\cdots f_n(x_0)$$

i punkten x_0.

2. (HKK Uppgift 5.2.19) Bevisa att

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$