

Hemuppgifter 3A

1. Ge exempel på funktioner $f : (0, 2) \rightarrow (0, 2)$ och $g : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ som inte är kontinuerliga, men för vilka $g \circ f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig.
2. (HKK Uppgift 4.1.26) Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Vi definierar funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genom $g(x) = |f(x)|$. Visa att g är kontinuerlig.

Tips: I handledningsuppgift 1L:2 visades att funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4|x|$ är kontinuerlig. Därmed är även absolutbeloppsfunktionen $x \mapsto |x|$ kontinuerlig (varför?).

Studera *monotona funktioner* i kursboken på sidorna 67-69.

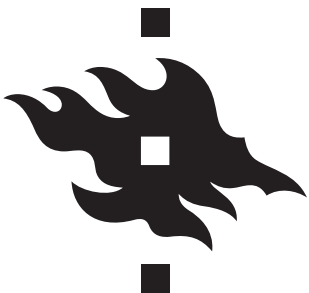
3. (HKK Uppgift 3.3.5) Låt $a \in \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. Visa att f är monoton.

Handledningsuppgifter 3A

1. (HKK Uppgift 1.5.23) Låt $f : A \rightarrow B$ och $g : B \rightarrow C$ vara bijektioner. Visa att $g \circ f : A \rightarrow C$ är en bijektion.
2. Visa att funktionen $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

är kontinuerlig och strängt avtagande. Bestäm uttrycket för dess inversfunktion f^{-1} . Är f^{-1} kontinuerlig?



Hemuppgifter 3L

1. *Tangensfunktionen* definieras genom kvoten

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Bestäm definitionsmängden för funktionen $\tan x$ och visa att funktionen är kontinuerlig i denna. Bestäm även gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}.$$

Du kan anta att sinusfunktionens grundegenskap

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

är känd (denna bevisas senare, Lemma 5.2.6 i kursboken).

2. Begränsa funktionen

$$f(x) = (x^3 - 1)^2$$

till intervall där den är monoton och definiera motsvarande inversfunktioner.

3. (HKU Uppgift 4.2.18) Bevisa kursbokens Korollarium 4.2.5(b).

KOROLLARIUM 4.2.5(B): Låt $n \in \mathbb{N}_1$ vara udda. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, har en kontinuerlig och strängt växande inversfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Handledningsuppgifter 3L

1. Låt $x, y > 0$, $m, p \in \mathbb{N}_0$ och $n, q \in \mathbb{N}_1$. Den *negativa rationella potensen* definieras enligt formeln

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}.$$

Visa att

$$x^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = \frac{x^{\frac{m}{n}}}{x^{\frac{p}{q}}}.$$

2. (HKK Uppgift 4.2.20) Ge lösningen till ekvationen $\cos x = \frac{1}{2}x$ med en decimals noggrannhet. Rita en bild av situationen.