VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
SYKSY 2013 / AUTUMN 2013

Täydentävää materiaalia

1. Taylorin kehitelmien muodostamisessa kahden tai useamman muuttuja funkioille on usein kätevää käyttää hyväksi kehitelmän yksikäsitteisyyttä sekä tunnettuja alkeisfunktioiden Taylor-sarjoja. Tämä perustuu seuraavaan tulokseen (jota on luvallista myös käyttää kurssikokeissa).

Lause. *Olkoon* $f : D \to \mathbb{R}$*, missä* $D \subset \mathbb{R}^2$ *avoin, kolme kertaa jatkuvasti derivoituva ja* $\bar{x} \in D$*. Oletetaan, että on olemassa reaaliluvut* $a_0, \ldots, a_{22}$, $r > 0$ *ja rajoitettu funktio* $R : B(0, r) \to \mathbb{R}$*, joille*

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(\bar{y}) &= a_0 + a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2) \\ &+ \frac{1}{2}a_{11}(y_1 - x_1)^2 + a_{12}(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + \frac{1}{2}a_{22}(y_2 - x_2)^2 \\ &+ |\bar{y} - \bar{x}|^3 R(\bar{y} - \bar{x}) \quad \textit{kaikilla} \;\; \bar{y} \in B(\bar{x}, r), \end{aligned}$$

niin silloin pätee $a_0 = f(\bar{x})$, $a_j = \partial_j f(\bar{x})$, $a_{jk} = \partial_{jk} f(\bar{x})$, $j, k = 1, 2$.

Toisin sanoen, tässä tilanteessa kaava $(*)$ on f:n 2. asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $\bar{x}$. Kaava $(*)$ voidaan kirjoittaa myös esimerkiksi muodossa

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \bar{h}) &= a_0 + a_1 h_1 + a_2 h_2 \\ &+ \frac{1}{2}a_{11}h_1^2 + a_{12}h_1 h_2 + \frac{1}{2}a_{22}h_2^2 \\ &+ |\bar{h}|^3 R(\bar{h}) \quad \text{missä} \;\; \bar{h} \in B(\bar{0}, r), \end{aligned}$$

2. **Huomautus.** Kahden muuttujan funktioiden ääriarvoprobleemiin ja varsinkin Hessen neliömuotoon $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ liittyvä terminologia vaihtelee eri lähteissä. Erityisesti termi *semidefiniitti* usein määritellään niin, että esimerkiksi positiividefiniitti Q olisi myös positiivisesti semidefiniitti, ja samoin negatiivisessa tapauksessa. Pidämme kuitenkin tällä kurssilla kiinni määritelmästä, jonka mukaan Q on semidefiniitti täsmälleen silloin, kun $ac - b^2 = 0$. Tämän mukaan definiitti Q (jolle $ac - b^2 > 0$) ei siis ole semidefiniitti.

3. **Käyräintegraaleista.** Luennoilla, laskuharjoitustehtävissä ja tenttitehtävissä käytetään nimitystä "integraali kaarenpituuden suhteen" oppikirjan määritelmän 6.1.1 mukaiselle integraalille ja "vektorikentän käytäintegraali" määritelmälle 6.1.6.. Edelleen, kuten kirjassa, voidaan myös käyttää termiä "käyräintegraali", joka voi tarkoittaa kumpaa tahansa edellisistä. Käyräintegraalien laskukaavoissa differentiaalin merkintä "ds" viittaa aina integraaliin kaarenpituuden suhteen. Lisäksi käytetään merkintöjä

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s} = \int_\gamma f dx + g dy + h dz = \int_\gamma f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz,$$

missä F on vektorikenttä $F = (f, g, h)$ ja f, g, h skalaarifunktioita. Vastaavasti tapauksessa $n = 2$, $\int_\gamma F \cdot d\bar{s} = \int_\gamma f dx + g dy$ jne. kentälle $F = (f, g)$.

4. **Yhdesti yhtenäiset tason osajoukot.** Tason avoin, yhtenäinen osajoukko A on *yhdesti yhtenäinen*, jos jokainen A:n umpinainen polku $\gamma : [0,1] \to A$ voidaan kutistaa pisteeksi jatkuvilla muunnoksilla; täsmällisesti, jos γ on kuten edellä, on olemassa piste $a \in A$ ja jatkuva kuvaus $h : [0,1] \times [0,1] \to A$, jolle

$$h(0,t) = \gamma(t) \text{ ja } h(1,t) = a \text{ kaikilla } t \in [0,1].$$

Joukko A on *konveksi*, mikäli $tx + (1-t)y \in A$ aina, kun x, $y \in A$ ja $0 < t < 1$. Voidaan osoittaa (vrt. Harj. 10), että konveksi, avoin joukko on yhdesti yhtenäinen

5. **Eksaktit vektorikentät korkeammissa dimensioissa.** Jatkuvan vektorifunktion $F : D \to \mathbf{R}^n$, missä $D \subset \mathbf{R}^n$ avoin, eksaktius korkeammissa dimensioissa $n \geq 3$ määritellään kuten tason tapauksessa, eli vaaditaan, että on olemassa jatkuvasti derivoituva skalaarifunktio u, jolle $\nabla u = F$. Mikäli määrittelyalue on esimerkiksi $\mathbf{R}^3$, saadaan eksaktisuudelle välttämätön ja riittävä ehto komponenttien osittaisderivaattoja koskevista yhtälöistä (3 kpl), kuten dimensiossa 2. Ehdot ovat:

$$\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1 \ , \ \partial_1 F_3 = \partial_3 F_1 \ , \ \partial_2 F_3 = \partial_3 F_2.$$

Potentiaalin laskemiseksi joudutaan yleensä ratkaisemaan kolme differentiaaliyhtälöä.