VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 9 /EXERCISE 9
SYKSY / AUTUMN 2014

1. Olkoon $\alpha > 0$. Millä α:n arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\,dxdy$$

suppenee, kun $A = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(\bar{0},1)$.

2. Integroi funktio $f(\bar{x}) = e^{x_1-x_4} + x_2x_3$, missä $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, yli avaruuden $\mathbb{R}^4$ suorakulmaisen särmiön $[0,1]\times[1,2]\times[-2,2]\times[0,1]$.

3. Integroi funktio $f(x,y,z) = 3x^2 + |(x,y,z)|$ yli avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon $B(\bar{0},1)$.

4. Laske integraali

$$\iiint_B h(x,y,z)dxdydz,$$

kun $h(x,y,z) = x(x^2+y^2)$ ja $B \subset \mathbb{R}^3$ on 1. oktantissa sijaitseva kappale, jota rajoittavat sylinteripinnat $x^2+y^2=2$ ja $x^2+y^2=4$, sekä tasot $z=-1$, $z=1$, $x=0$ ja $x=y$. Ohje. Sylinterikoordinaatit.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ kappale, jota rajoittaa yläpuolelta taso $z = 3-2y$ ja alapuolelta paraboloidi $z = x^2+y^2$ integroimalla vakiofunktiota 1 yli joukon A. Ohje. Muuttujan z integroimisrajat määräytyvät suoraan annetuista pinnoista. Mitä tulee muihin muuttujiin, mainittujen pintojen leikkaus sijaitsee sylinteripinnalla S, joka on muotoa

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2\},$$

missä a, b ja c ovat reaalilukuja. Määrää ensin nämä luvut. Tästä saat integroimisrajat x:lle ja y:lle.

6. Olkoon $A_t = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \le |x| \le t\}$, $t > 1$, ja $A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : |x| \ge 1\}$, sekä $x = (x_1,x_2)$. Onko lausekkeella

$$\int_{A_t} \frac{1}{|\bar{x}|}\sin(e^{|\bar{x}|})dx_1dx_2 \quad ?$$

raja-arvoa, kun $t \to \infty$? Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_{A} \frac{1}{|\bar{x}|}\sin(e^{|\bar{x}|})dx_1dx_2 \quad ?$$

(Napakoordinaatit. $\int \sin e^r dr = \int e^{-r}e^r \sin e^r dr$ ja osittaisintegrointi.)
****

1. For which $\alpha > 0$ does the improper (or generalized) integral

$$\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\,dxdy$$

converge, when $A = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(\bar{0}, 1)$.

2. Integrate the function $f(\bar{x}) = e^{x_1 - x_4} + x_2 x_3$, where $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, over the parallelepiped $[0,1] \times [1,2] \times [-2,2] \times [0,1]$ of $\mathbb{R}^4$

3. Integrate the function $f(x,y,z) = 3x^2 + |(x,y,z)|$ over the unit ball $B(\bar{0},1)$ of the space $\mathbb{R}^3$.

4. Calculate the integral

$$\iiint\limits_B h(x,y,z)\,dxdydz,$$

when $h(x,y,z) = x(x^2+y^2)$ and $B \subset \mathbb{R}^3$ is a body situated in the 1st octant of $\mathbb{R}^3$, bounded by the cylindrical surfaces $x^2 + y^2 = 2$ and $x^2 + y^2 = 4$, and the planes $z = -1$, $z = 1$, $x = 0$ and $x = y$. Hint. Use cylinder coordinates.

5. Let $A \subset \mathbb{R}^3$ be a body bounded from above by the plane $z = 3 - 2y$ and from below the paraboloid $z = x^2 + y^2$. Calculate the volume of A, i.e. integrate the constant function 1 over A. Instructions. The integration bounds of z are directly determined by the given surfaces. As for the other variables, the intersection of the two given surfaces is a subset of the cylinder S,

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2\},$$

where a, b and c are real numbers. Finding these numbers first, you can determine the integration bounds for x and y.

6. Let $A_t = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq |x| \leq t\}$, $t > 1$, and $A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \geq 1\}$, and $x = (x_1, x_2)$. Does the expression

$$\int\limits_{A_t} \frac{1}{|\bar{x}|} \sin(e^{|\bar{x}|})\,dx_1 dx_2 \quad ?$$

have a limit as $t \to \infty$? Does the improper integral

$$\int\limits_{A} \frac{1}{|\bar{x}|} \sin(e^{|\bar{x}|})\,dx_1 dx_2 \quad ?$$

converge. (Polar coordinates. $\int \sin e^r dr = \int e^{-r} e^r \sin e^r dr$ and integration by parts.)