VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 8 / EXERCISE 8
SYKSY / AUTUMN 2014

1. Laske sen kappaleen $B \subset \mathbb{R}^3$ tilavuus, jonka sivut muodostuvat sylinteristä $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4\}$, pohja tasosta $\{(x,y,z) : z = -5\}$ ja kansi a) tasosta $\{(x,y,z) : z = 5\}$, b) pinnasta $\{(x,y,z) : z = 5-(x^2+y^2)/4\}$.

2. Laske sen kappaleen $G \subset \mathbb{R}^3$ tilavuus, jota rajoittaa alhaalta pinta $z = x^2$ ja ylhäältä pinta $z = 1-y^2$. Ohje. Integroimisrajat saat tutkimalla joukkoa jossa pinnat leikkaavat.

3. Laske integraali

$$\int_Q g\,dxdy,$$

kun $Q \subset \mathbb{R}^2$ on suunnikas, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,3)$, $(2,3)$, $(-2,-3)$ ja $(0,-3)$, sekä g on funktio $g(x,y) = ye^x$. Käytä koordinaattimuunnosta, joka muuntaa integroimisalueen suorakulmioksi, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

4. Olkoon D tason osajoukko $\bar{B}(\bar{0},4) \setminus B(\bar{0},2)$. Käyttäen napakoordinaatteja, laske integraali

$$\iint_D x(x^2+y^2)dA.$$

5. Olkoon $\alpha > 0$. Millä α:n arvoilla epäoleellinen integraali

$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\,dxdy$$

suppenee, kun joukko A on
a) $\bar{B}(\bar{0},1) \setminus \{\bar{0}\}$,
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x^2+y^2| \leq 1,\ y \geq |x|\}$?

6. Onko joukko $\{s(0,1)+(1-s)(t,0) : s \in [0,1], t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ Lebesguen 0-joukko?

****

1. Calculate the volume of the body $B \subset \mathbb{R}^3$, the sides of which consist of the cylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4\}$, bottom of the plane $\{(x,y,z) : z = -5\}$ and top of a) the plane $\{(x,y,z) : z = 5\}$, b) the surface $\{(x,y,z) : z = 5-(x^2+y^2)/4\}$.

2. Calculate the volume of the body $G \subset \mathbb{R}^3$, which is bounded from below by the surface $z = x^2$ and from above by the surface $z = 1-y^2$. Instruction. To determine the integration domain you should study the intersection of the two surfaces.

3. Calculate the integral

$$\int_Q g\, dxdy,$$

when $Q \subset \mathbb{R}^2$ is a parallelogram with vertices at the points $(0,3)$, $(2,3)$, $(-2,-3)$ and $(0,-3)$, and g is the function $g(x,y) = ye^x$. Use a change of coordinates, which tranforms the integration domain into a rectangle with sides parallel to the coordinate axis.

4. Let D be the subset of the plane $\bar{B}(\bar{0},4) \setminus B(\bar{0},2)$. Determine the integral

$$\iint_D x(x^2+y^2)dA$$

by using polar coordinates.

5. Let $\alpha > 0$. For which values of α does the improper integral

$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\, dxdy$$

converge, when A is the set
a) $\bar{B}(\bar{0},1) \setminus \{\bar{0}\}$,
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < |x^2+y^2| \leq 1,\ y \geq |x|\}$?

6. Is the set $\{s(0,1) + (1-s)(t,0) \,:\, s \in [0,1], t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ of Lebesgue measure 0?