

VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES  
 LASKUHARJOITUS 7 / EXERCISE 7  
 SYKSY / AUTUMN 2014

1. Laske  $\int_A (3x^2y - 2xy^3) dx dy$ , kun

a)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x^2\},$

b)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -y^2 \leq x \leq y\}.$

2. Olkoon  $D := [-\pi, 3\pi] \times [-\pi, \pi]$  ja  $A := [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ . Laske

$$\int_B \cos(x_1 + x_2) dx_1 dx_2,$$

kun  $B = D \setminus A$ .

3. Olkoon  $D = [-1, 2] \times [0, 3]$ . Laske integraali

$$\int_D \frac{\partial \sqrt{x + e^{y^3} + 1}}{\partial y} dx dy.$$

4. Laske  $\int_{[0,2] \times [-2,2]} f dx dy$ , kun  $f : [0, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  on funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } y \geq \sqrt{x} \\ ye^{x+2}, & \text{jos } y < \sqrt{x}. \end{cases}$$

5. Olkoon  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio. Osoita (vrt. oppikirja, Lauseen 4.1.6 todistus), että funktio

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

on jatkuva joukossa  $[c, d]$ .

6. Olkoot funktiot  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , missä  $g(x) > 0$  kaikilla  $x \in [0, 1]$ , sekä  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvia. Osoita, että seuraava funktio  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva:

$$\psi(x) = \int_0^{g(x)} f(x, y) dy.$$

*Vinkkejä.* – Useissa tehtävissä on syytä jakaa integroimisalue osiin ja käsitellä osat erikseen. – Kompaktissa joukossa jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

\*\*\*\*\*

1. Calculate the integral  $\int_A (3x^2y - 2xy^3) dx dy$  for

a)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x^2\},$

b)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -y^2 \leq x \leq y\}.$

2. Let  $D := [-\pi, 3\pi] \times [-\pi, \pi]$  ja  $A := [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ . Calculate

$$\int_B \cos(x_1 + x_2) dx_1 dx_2,$$

when  $B = D \setminus A$ .

3. Let  $D = [-1, 2] \times [0, 3]$ . Calculate the integral

$$\int_D \frac{\partial \sqrt{x + e^{y^3} + 1}}{\partial y} dx dy.$$

4. Determine  $\int_{[0,2] \times [-2,2]} f dx dy$ , when  $f : [0, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  is the function

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \geq \sqrt{x} \\ ye^{x+2}, & \text{if } y < \sqrt{x}. \end{cases}$$

5. Let  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function. Prove that the function

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

is continuous in the set  $[c, d]$ .

6. Let the functions  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , where  $g(x) > 0$  for  $x \in [0, 1]$ , and  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous. Show that the following function  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  is also continuous:

$$\psi(x) = \int_0^{g(x)} f(x, y) dy.$$

*Hints.* – In several problems you have to divide the integration domain to subdomains and treat them separately. – A function continuous in a compact set is also uniformly continuous.