VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 6 / EXERCISE 6
SYKSY 2014 / AUTUMN 2014

1. Esitä esimerkkejä kahden muuttujan funktioista, jotka ovat $C^3(\mathbb{R}^2)$ ja joilla piste $\bar{a} = (2, -2)$ on kriittinen piste, jossa Hessen neliömuoto Q on positiivisesti semidefiniitti, ja $\bar{a}$ on a) aito minimi b) minimi, joka ei ole aito. (Esimerkkejä voi muodostaa vaikkapa kahden muuttujan polynomeista. Voit aluksi ajatella, että tarkastelupiste on origo pisteen $\bar{a}$ sijasta.)

2. Samoin kuin edellinen, mutta kriittinen piste on $\bar{a} = (1, 0)$, jossa ei ole ääriarvoa ja jossa Q on negatiivisesti semidefiniitti.

3. Mikä on funktion $f(x, y) := x(y-1)$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$\{(x, y) \mid 0 \le y \le 2, -y \le x \le y^3\}$$

4. Onko funktiolla

$$h(x, y) := \frac{y}{2x^2 + 2y^2}$$

suurinta tai pienintä arvoa joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$?

5. Lagrangen kertoimia voidaan käyttää myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$, kun $n \ge 3$. Kerrointa koskeva yhtälö on samaa muotoa kuin tapauksessa $n = 2$. Esimerkiksi tapauksessa $n = 3$ sekä maksimoitava (tai minimoitava) funktio ja sidosehtofunktio ovat siis kolmen muuttujan funktioita, ja sidosehto kuvaa tyypillisesti jotain pintaa avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
Olkoon $M \subset \mathbb{R}^3$ suorakulmainen särmiö, jonka sivut ovat koordinaattitasojen suuntaiset ja joka on ellipsoidin

$$\left\{\bar{x} = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{3}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{5}\right)^2 = 1\right\}$$

sisällä. Laske M:n suurin mahdollinen tilavuus.

6. Etsi funktion $f(x, y) = 2x + 3y$ suurin arvo joukossa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0, 0 \le y \le 5, x + 2y \le 12, 4x + y \le 12\}.$$

****

1. Give examples of functions of two varibles, which are $C^3(\mathbb{R}^2)$, such that the point $\bar{a} = (1, 1)$ is a critical point at which the Hessian quadratic form Q is positive semidefinite and $\bar{a}$ is a) a strict local minimum b) a local minimum which is not strict. (Examples can be constructed e.g. using two variable polynomials. You may start by thinking about the origin instead of the point $\bar{a}$. By a "strict" minimum we mean a point $\bar{x}$ such that $f(\bar{y}) > f(\bar{x})$ for $\bar{y} \neq \bar{x}$ in a neighbourhood of $\bar{x}$.)

2. The same as problem 1, but the critical point is $\bar{a} = (1, 0)$, which is not an extremal point and at which the Hessian is negative semidefinite.

3. Find the absolute maximum and minimum values of $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x(y-1)$ in the set

$$\{(x,y) \mid 0 \le y \le 2, -y \le x \le y^3\}$$

4. Does the function

$$h(x,y) := \frac{y}{2x^2 + 2y^2}$$

have an absolute maximum or miminum value in the set $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$?

5. Lagrange multipliers can also be used in the space $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$. The corresponding equation for the coefficient is of the same form as in the case $n = 2$. For example, if $n = 3$, both the function under investigation and the constraint function are functions of three variables, and the constraint condition typically describes a surface in the space $\mathbb{R}^3$.
Let $M \subset \mathbb{R}^3$ be a rectangular parallelepiped with sides parallel to coordinate planes, which is contained in the ellipsoid

$$\left\{\bar{x} = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{3}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{5}\right)^2 = 1\right\}.$$

Find the maximal volume of M.

6. Find the largest value of the function $f(x,y) = 2x + 3y$ in the set

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0, 0 \le y \le 5, x + 2y \le 12, 4x + y \le 12\}.$$