VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 5 / EXERCISE 5
SYKSY 2014 / AUTUMN 2014

1. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^3 - 4xy + 2y$$

kriittiset pisteet.

2. Jos $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ovat lukuja, joille $m + n \geq 3$, niin onko olemassa vakiota $C > 0$, jolle pätee

$$|h|^m |k|^n \leq C|(h, k)|^3$$

kaikilla vektoreilla $(h, k) \in B(\bar{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$? (Vastaus: kyllä. Tätä epäyhtälöä tarvitaan Taylor-kehitelmän jäännöstermin arvioinnissa. Todista epäyhtälö.)

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funktio

a) $f(x, y) := x^3 - y^3 + 3xy$, b) $f(x, y) := x^2 + y^2 + xy + x - y$.

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

4. Samoin, kun

$$f(x_1, x_2) := (x_2^2 + x_1^2 - 4)e^{x_1 + x_2}.$$

5. Samoin, kun

$$f(x, y) := x^3 - 4xy^2 + x^2.$$

(Tarkastele arvoja x–akselilla ja paraabelilla $y^2 = x$.)

6. Olkoon $f \in C^1(\mathbb{R})$ funktio, jolla on täsmälleen yksi kriittinen piste, missä sillä on aito lokaali minimi. Tällöin tiedetään, että tämä piste on myös f:n aito absoluuttinen minimi.
Osoita esimerkillä, että vastaava ei päde kahden muuttujan funktioille $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Voit tutkia esimerkiksi funktiota

$$f(x, y) := -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}},$$

jonka ainoa aito lokaali minimipiste on $(0, 0)$.

****

1. Find the critical points of the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^3 - 4xy + 2y.$$

2. If $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ are numbers with $m + n \geq 3$, then, does there exist a constant $C > 0$ such that

$$|h|^m |k|^n \leq C|(h, k)|^3$$

for all vectors $(h, k) \in B(\bar{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$? (Answer: yes. Needed in the theory of Taylor developments. Prove the inequality.)

3. Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be the funtion

a) $f(x, y) := x^3 - y^3 + 3xy$, b) $f(x, y) := x^2 + y^2 + xy + x - y$.

Find the local (= "relative") extrema of f.

4. The same for

$$f(x_1, x_2) := (x_2^2 + x_1^2 - 4)e^{x_1+x_2}.$$

5. The same for

$$f(x, y) := x^3 - 4xy^2 + x^2.$$

(Think about the values on the x–axis and on the parabola $y^2 = x$.)

6. Let $f \in C^1(\mathbb{R})$ be a function with exactly one critical point, which is a strict local minimum. Then it is known that this point is also a global (absolute) minimum. Give an example showing that the corresponding statement does not hold for functions $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ of two variables. You can for example consider the function

$$f(x, y) := -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}},$$

with the only strict local minimum at $(0, 0)$.