VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 4 / EXERCISE 4
SYKSY 2014 / AUTUMN 2014

Käytämme korkeamman kertaluvun osittaisderivaatoille kirjan merkintätapojen lisäksi myös merkintää $\partial_{12} = \partial_1\partial_2$ ja $\partial_{112} = \partial_1^2\partial_2 = \partial_1\partial_1\partial_2$ jne.

1. Laske $\partial_2 g$, $\partial_{21} g$, $\partial_{12} g$, $\partial_{213} g$, $\partial_{123} g$ ja $\partial_2^2\partial_3\partial_1 g$, kun

$$g(\bar{x}) = \sin(x_1^2 - 3x_3)x_2 \quad , \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Muodosta toisen asteen Taylorin kehitelmä funktioille $g(x, y) = 3ye^{2x}$ pisteessä a) $(0, 0)$, b) $(1, 2)$. (Huom! Kannattaa tutustua kotisivun lismateriaalin kohtaan 1. Suoran derivoinnin sijasta voit käyttää tunnettuja Taylor-sarjoja ja Taylor-kehitelmän yksikäsitteisyyttä.)

3. Samoin, muodosta toisen asteen Taylorin kehitelmä funktiolle f,

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2}{1 + 2y}$$

pisteessä $(0, 0)$.

4. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ avoin. Sanomme, että funktio $u \in C^2(D)$ on harmoninen joukossa D, jos

$$\partial_{11}u + \partial_{22}u = 0$$

kaikkialla joukossa D.
Onko funktio

$$u(x, y) := 2^{x^2+y^2} \quad \text{tai} \quad w(\bar{x}) = \log\big(2|\bar{x}|\big)$$

harmoninen jossain tason osajoukossa? log = luonnollinen logaritmi.

5. Osoita: Jos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on derivoituva kaikkialla ja $\nabla f = 0$ koko tasossa, niin f on vakiofunktio.

6. Todista väliarvolause avaruudessa $\mathbb{R}^n$: Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f \in C^1(D)$, $x, y \in D$, ja jana

$$I := \{ty + (1 - t)x \mid t \in [0, 1]\} \subset D.$$

Tällöin on olemassa sellainen $\xi \in I$, että

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x).$$

Neuvo. Tarkastele funktiota $\varphi(t) := f(ty + (1 - t)x)$, missä $t \in [0, 1]$.

****

We use the notation $\partial_{12} = \partial_1\partial_2$ and $\partial_{112} = \partial_1^2\partial_2 = \partial_1\partial_1\partial_2$ etc. in the following.

1. Calculate $\partial_2 g$, $\partial_{21} g$, $\partial_{12} g$, $\partial_{213} g$, $\partial_{123} g$ and $\partial_2^2\partial_3\partial_1 g$ for

$$g(\bar{x}) = \sin(x_1^2 - 3x_3)x_2 \quad , \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Write the Taylor expansion of the second degree for the function $g(x, y) = 3ye^{2x}$ at the point a) $(0, 0)$, b) $(1, 2)$. (You may also use known Taylor series and the uniqueness result of Taylor expansions.)

3. The same for the function f,

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2}{1 + 2y}$$

at the point $(0, 0)$.

4. Let $D \subset \mathbf{R}^2$ be open. We call a function $u \in C^2(D)$ harmonic in the set D, if

$$\partial_{11}u + \partial_{22}u = 0$$

everywhere in D.
Is the function

$$u(x, y) := 2^{x^2+y^2} \quad \text{tai} \quad w(\bar{x}) = \log\big(2|\bar{x}|\big)$$

harmonic in some subdomain of the plane? log = natural logarithm with base e.

5. Assume $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is differentiable everywhere and that $\nabla f = 0$ in the plane. Show that f is a constant function.

6. Prove the mean value theorem in the space $\mathbb{R}^n$: Let $D \subset \mathbb{R}^n$ be open, $f \in C^1(D)$, $x, y \in D$, and define the line segment

$$I := \{ty + (1 - t)x \mid t \in [0, 1]\} \subset D.$$

Then there exists a $\xi \in I$ such that

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x).$$

(You might consider the function $\varphi(t) := f(ty + (1 - t)x)$, where $t \in [0, 1]$.)