VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 3 / EXERCISE 3
SYKSY 2014 / AUTUMN 2014

1. Muodosta ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat suoraan yhdistetyn funktion lausekkeesta sekä ketjusääntöä käyttäen, kun $f = h \circ w$, sekä $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ja

a) $w(\bar{x}) = (x_1 + 2, x_1 x_2)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, ja $h(x, y) = e^{x+y} + 2x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

b) $w(x, y) = \left(x^3, xy^2\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ja $h(\bar{x}) = x_2 - x_1^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

2. Muodosta yhdistetty funktio $f \circ g$, kun

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = x_1 + \sin x_2$, ja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(\bar{x}) = (e^{x_1+x_2}, x_3, x_2^2)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \left(1 + x^2 + y^2, 2, y^2 - x\right)$, ja $g : B(\bar{0}, 10) \to \mathbb{R}^2$, $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$, missä $B(\bar{0}, 10)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ avoin kuula.

3. Laske tehtävän 2.a) funktion $f \circ g$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat suoraan sekä ketjusääntöä käyttäen. Laske tehtävän 2.b) funktioiden f ja g derivaatat (kaikissa ko. funktioiden määrittelyjoukkojen pisteissä), sekä laske $(f \circ g)'(1, 0, 1)$

4. Olkoon $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$ ja $g(x, y) = (y^3, \cos x)$. Laske funktioiden $g \circ f$ ja $f \circ g$ derivaatta pisteessä $(1, 1)$.

5. Mihin suuntaan funktio $f(\bar{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + 9x_3^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, kasvaa nopeimmin pisteessä $(1, -1, 1)$? Laske myös f:n derivaatta vektorin $(2, 1, 0)$ suuntaan tässä pisteessä.

6. Etsi pisteitä $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, joissa tehtävän 4 funktiolle f pätee, että derivaatan $f'(a, b) =: M$ determinantti on 0. Kertaa lineaarialgebrasta, mitä tämä kertoo lineaarikuvauksen M kuvausominaisuuksista (onko M injektio, surjektio, bijektio). Pohdiskele (ilman todistuksia, asiaan palataan myöhemmin), mitä tämä vaikuttaa f:n kuvausominaisuuksiin pisteen (a, b) ympäristössä.

****

1. Calculate the partial derivatives of first order both by differentiating the expression of the composed function and also by using the chain rule, given $f = h \circ w$ with $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, and

a) $w(\bar{x}) = (x_1 + 2, x_1 x_2)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, and $h(x, y) = e^{x+y} + 2x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

b) $w(x, y) = \left(x^3, xy^2\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, and $h(\bar{x}) = x_2 - x_1^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

2. Write the composed function $f \circ g$, when

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = x_1 + \sin x_2$, and $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(\bar{x}) = (e^{x_1+x_2}, x_3, x_2^2)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \left(1 + x^2 + y^2, 2, y^2 - x\right)$, and $g : B(\bar{0}, 10) \to \mathbb{R}^2$, $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$, where $B(\bar{0}, 10)$ is an open ball of the space $\mathbb{R}^3$.

3. Calculate the partial derivatives of first order both by direct differentiation and by the chain rule for the function $f \circ g$ of Exercise 2.a). In the Exercise 2.b), write the derivatives of the functions f and g (in all points of their domains of definitions), and also calculate $(f \circ g)'(1, 0, 1)$.

4. Let $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$ ja $g(x, y) = (y^3, \cos x)$. Calculate the derivatives of the functions $g \circ f$ and $f \circ g$ at the point $(1, 1)$.

5. In which direction does the function $f(\bar{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + 9x_3^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, have the strongest growth at the point $(1, -1, 1)$? Calculate the partial derivative of f to the direction $(2, 1, 0)$ at this point.

6. Consider the function f of problem 4. Find points (a, b), where the determinant of the derivative $f'(a, b) = M$ is 0. In view of linear algebra, what does this imply about the mapping properties of M (injectivity, surjectivity, bijectivity). Without proofs, try to think about what effects this has to the mapping properties of f around the point (a, b).