VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 2 / EXERCISE 2
SYKSY 2014 / AUTUMN 2014

1. Onko funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$\text{a)}\ \ f(x,y) = \frac{x+y}{|x|+|y|}\ ,\ \ \text{b)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2+y}{|x|+y^2}\ ,\ \ \text{c)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

raja-arvoa origossa? (Epäyhtälöstä $\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$ voi olla apua.)

2. Missä tason osajoukossa on funktio f,

$$f(x_1,x_2) = \frac{e^{3-x_1} - 1 + x_2^2}{x_1 - 3}$$

määritelty? Onko funktiolla raja-arvoa pisteessä $(3,0)$? Samoin funktiolle g,

$$g(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2 - 9}{(x_1-3)^2 + x_2^2}.$$

3. Laske kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ($\partial_1 u(\bar{x})$, $\partial_2 u(\bar{x})$ jne.), kun u on

a) $u(\bar{x}) = 4x_2^3x_3 + \cos(x_1 + x_1x_2x_3)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$,

b) $u(\bar{x}) = \pi x_1^{x_2}$, missä $\bar{x} \in \mathbb{R}^2,\ x_1 > 0$,

c) $u(\bar{x}) = \pi^2 x_1^{2x_2x_3}$, missä $\bar{x} \in \mathbb{R}^3,\ x_1 > 0$,

d) tehtävän 2 funktio g määrittelyalueessaan.

4. Muodosta kolmen muuttujan funktion $f(x,y,z) = x^2y + \cos(xyz)$ gradientti.

5. Muodosta funktion differentioituvuuden määritelmässä esiintyvä affiini approksimaatio funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = x_2^2 - x_1^2$ pisteessä a) $(1,1)$, b) $(0,0)$. (Suositus: hahmottele f:n kuvaajaa ja sitä approksimoivaa tasoa kummassakin tarkastelupisteessä.)

6. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla $\partial_1 f(x_1,x_2) = 0$ kaikilla $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, mutta joka ei ole jatkuva.

****

1. Does the function $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$\text{a)}\ \ f(x,y) = \frac{x+y}{|x|+|y|}\ ,\ \ \text{b)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2+y}{|x|+y^2}\ ,\ \ \text{c)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

have a limit value in the origin? (The inequality $\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$ may be of some help.)

2. Which planar domain is the domain of the definition of the function f,

$$f(x_1,x_2) = \frac{e^{3-x_1} - 1 + x_2^2}{x_1 - 3}\ ?$$

Does the function have a limit value at the point $(3,0)$? The same for the function g,

$$g(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2 - 9}{(x_1-3)^2 + x_2^2}.$$

3. Calculate all partial derivatives of the first order ($\partial_1 u(\bar{x})$, $\partial_2 u(\bar{x})$ erc.) for the function u, which is

a) $u(\bar{x}) = 4x_2^3 x_3 + \cos(x_1 + x_1 x_2 x_3)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$,

b) $u(\bar{x}) = \pi x_1^{x_2}$, where $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $x_1 > 0$,

c) $u(\bar{x}) = \pi^2 x_1^{2x_2x_3}$, where $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, $x_1 > 0$,

d) the function g of problem 2.

4. Write the gradient for the function $f(x,y,z) = x^2 y + \cos(xyz)$.

5. Write the affine approximation, which appears in the definition of differentiability, for the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = x_2^2 - x_1^2$ at the point a) $(1,1)$, b) $(0,0)$. (Recommendation: sketch the graph of f and its approximating planes at both points.)

6. Find an example of a non-continuous function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, which however satisfies $\partial_1 f(x_1,x_2) = 0$ for all $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.