VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS / EXERCISE 11
SYKSY / AUTUMN 2014

1. Käyttäen Greenin kaavaa tasossa, laske seuraavat käyräintegraalit:

$$\text{a)} \oint_{\partial A} (x_2 dx_1 - 6x_1 dx_2)\ , \quad \text{b)} \oint_{\partial A} (4y^2 dx + x^2 dy).$$

Kohdassa a) joukon A määräävät ehdot $0 < x_2 < \pi$, $0 < x_1 < \sin x_2$. Kohdassa b), joukko A on kolmio, jota rajoittavat suorat $x = 0$, $x + y = 2$, $y = 0$.

2. Osoita, että tason avoin, konveksi osajoukko on yhdesti yhtenäinen. Voit esimerkiksi olettaa, että $\bar{0} \in A$. (Vrt. kurssin täydentävä materiaali.)

3. Osoita, että vektorikenttä $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) := (e^y \cos x - z, e^y \sin x + 3z, 3y - x)$$

on eksakti, ja määrää jokin sen potentiaali. (Vrt. kurssin täydentävä materiaali.)

4. a) Esitä parametrisointi kartiopinnalle

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1\}.$$

b) Laske tämän pinnan pinta-ala.

5. Laske vektorikentän $F(x, y, z) = (yz, x, -z^2)$ vuo läpi pinnan, joka on parabolinen sylinteri

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x^2, 0 \le x \le 1, 0 \le z \le 4\}.$$

(Normaalivektorin suunnalle on kaksi vaihtoehtoa.)

6. Integroi funktio $g(x, y, z) = x^2$ yli tehtävän 4 kartiopinnan.
****

1. Calculate the following path integrals using the Green formula in the plane:

$$\text{a)} \oint_{\partial A} (x_2 dx_1 - 6x_1 dx_2)\ , \quad \text{b)} \oint_{\partial A} (4y^2 dx + x^2 dy).$$

In the item a) the domain A is defined by the conditions $0 < x_2 < \pi$, $0 < x_1 < \sin x_2$. In the item b), the domain A is a triangle bounded by the lines $x = 0$, $x + y = 2$, $y = 0$.

2. Show that any open, convex subset of the plane is simply connected. You can for example assume that $\bar{0} \in A$ (cf. complementary course material on the web page, in Finnish only, sorry).

3. Prove that the vector field $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) := (e^y \cos x - z, e^y \sin x + 3z, 3y - x)$$

is exact, and find its potential (cf. complementary course material).

4. a) Find a parametrisation for the cone surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1\}.$$

b) Calculate the area of this surface..

5. Calculate the flux of the vector field $F(x, y, z) = (yz, x, -z^2)$ through the parabolic cylinder

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = x^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}.$$

(The normal vector can be chosen in two different ways.)

6. Integrate the function $g(x, y, z) = x^2$ over the cone of problem 4.