VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS / EXERCISE 10
SYKSY / AUTUMN 2014

1. Laske seuraavan polun pituus: $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (t^2, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

2. Laske

$$\int_\Gamma ydx - xdy + dz, \qquad (*)$$

kun Γ:n alkupiste on origo ja loppupiste $(1, 1, 1)$ ja se on a) murtoviiva, joka kulkee pisteiden $(1, 0, 0)$ ja $(1, 0, 1)$ kautta, b) käyrä $\Gamma(t) = (t^2, t^2, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Merkintä $(*)$ tarkoittaa oppikirjan merkinnöin käyräintegraalia

$$\int_\Gamma F \cdot d\bar{s},$$

missä $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on vektorikenttä $F(x, y, z) := (y, -x, 1)$.

3. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x, y) := (2xy + 3y^2, y^2)$,
b) $F(x, y) := \big(\sin(x + y) + x\cos(x + y), x\cos(x + y)\big)$,

4. a) Kuten edellinen tehtävä, ja $F(x, y) := (3y^2 + 6e^{6x}, 6xy)$
b) Määritä vakio $a > 0$ siten, että vektorikentästä $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$G(x_1, x_2) = \big(\frac{16}{a}x_2, 2x_2 + ax_1\big)$$

tulee eksakti.

5. Laske

$$\oint_{\partial D} (x^2y + y^3, -100x) \cdot d\bar{s} \ ,$$

kun $D \subset \mathbb{R}^2$ on origokeskinen, 10-säteinen kiekko.

6. Oletetaan, että vektorikenttä $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on eksakti. Onko seuraava kenttä $G(x, y)$ aina eksakti ($a, b \in \mathbb{R}$ vakioita, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ muuttuja) :

a) $G(x, y) = \big(aF_1(x, y) + 10b, aF_2(x, y) + 5b\big)$, b) $G(x, y) = \big(F_2(y, x), F_1(y, x)\big)$,

c) $G(x, y) = \big(F_1(x, y + e^x), F_2(x - e^y, y)\big)$?

****

1. Calculate the length of the path $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (t^2, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

2. Calculate

$$\int_\Gamma ydx - xdy + dz, \qquad (*)$$

when Γ starts from the origin and ends at $(1,1,1)$, and it is a) the polyline running through the points $(1,0,0)$ and $(1,0,1)$, b) the arc $\Gamma(t) = (t^2, t^2, t^2)$, $t \in [0,1]$.

The formula $(*)$ means in the notation of Martio's book the path integral

$$\int_\Gamma F \cdot d\bar{s},$$

where $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is the vector field $F(x,y,z) := (y, -x, 1)$.

3. Find out, if the following vector fields $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ are exact, and in the case they are, determine their potential functions:
a) $F(x,y) := (2xy + 3y^2, y^2)$,
b) $F(x,y) := \big(\sin(x+y) + x\cos(x+y), x\cos(x+y)\big)$,

4. a) As the previous problem, with $F(x,y) := (3y^2 + 6e^{6x}, 6xy)$
b) Find the constant $a > 0$ such that the field $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$G(x_1, x_2) = \big(\frac{16}{a}x_2, 2x_2 + ax_1\big)$$

becomes exact.

5. Calculate

$$\oint_{\partial D} (x^2 y + y^3, -100x) \cdot d\bar{s} \ ,$$

when $D \subset \mathbb{R}^2$ is a disc with center at the origin and radius 10.

6. Assume that the vector field $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is exact. Is the following field $G(x,y)$ always exact ($a, b \in \mathbb{R}$ constants, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ variable) :

a) $G(x,y) = \big(aF_1(x,y) + 10b, aF_2(x,y) + 5b\big)$, b) $G(x,y) = \big(F_2(y,x), F_1(y,x)\big)$,

c) $G(x,y) = \big(F_1(x, y + e^x), F_2(x - e^y, y)\big)$?