Vektorianalyysi, 1. kurssikoe 20.10.2014

Ratkaisuja.

1. väite. Funktiota f ei voida määritellä origossa niin, että funktiosta tulisi jatkuva koko tasossa.

tod. oikeansuuntainen idea: esim. osoitetaan, että funktiolla ei ole raja-arvoa origossa. } 1 p.

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$ } 2 p.

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0$$ } 2 p.

Raja-arvot ovat erisuuret, joten f:llä ei ole raja-arvoa origossa. } 1 p.

[Voidaan myös tarkastella esim. jonoja: keksitään esimerkkijonot (a_n) ja (b_n) s.e. $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ ja $b_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$, mutta $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$]

$\square$

2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$;

merk. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ ja $A_0 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Käytetään Lausetta 3.4.2, s. 86.

Havaitaan ensin, että $\nabla g(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0) \neq \bar{0}$ $\forall (x_0,y_0) \in A_0$.

1p. { Ratkaistaan yhtälö $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$:

1p. {

$$(2x_0 + y_0, 2y_0 + x_0) = \lambda(2x_0, 2y_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 = 2\lambda x_0 \\ 2y_0 + x_0 = 2\lambda y_0 \end{cases}$$

2p. {

- Jos $x_0 \neq 0$, saadaan 1. yhtälöstä $\lambda = \frac{2x_0 + y_0}{2x_0}$ ja sijoittamalla 2. yhtälöön $2y_0 + x_0 = 2\,\frac{2x_0 + y_0}{2x_0}\,y_0$
  $\Rightarrow 2x_0y_0 + x_0^2 = 2x_0y_0 + y_0^2 \Rightarrow x_0^2 = y_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm y_0$.
- Jos $x_0 = 0$, saadaan 1. yhtälöstä $y_0 = 0$ eli ei ratkaisua joukossa A_0.

Siis lokaalissa ääriarvokohdassa (x_0,y_0) pätee $x_0 = \pm y_0$, joten

1p. { (koska ollaan yksikköympyrän kehällä) $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1p. { Saadaan, että

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ suurin arvo}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ pienin arvo.}$$

3. $$h'(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_1 h_1(x,y) & \partial_2 h_1(x,y) \\ \partial_1 h_2(x,y) & \partial_2 h_2(x,y) \end{bmatrix}$$ } oikeasta ideasta 1 p.

$$= \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{bmatrix}$$ (1 p.)

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$ (1 p.)

$$g(h(x,y)) = g(e^{x+y}, e^{x-y}) = (e^{2x+2y} + e^{x-y}, -3e^{x+y})$$ (1 p.)

$$(g \circ h)'(x,y) = \begin{bmatrix} 2e^{2x+2y} + e^{x-y} & 2e^{2x+2y} - e^{x-y} \\ -3e^{x+y} & -3e^{x+y} \end{bmatrix}$$ (1 p.)

$$(g \circ h)'(1,1) = \begin{bmatrix} 2e^4+1 & 2e^4-1 \\ -3e^2 & -3e^2 \end{bmatrix}$$ (1 p.)

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 9x + 4y^2$

$\nabla f(x) = (3x^2 - 9, 8y) = \bar{0} \iff x = \pm\sqrt{3}$ ja $y = 0$ (2 p.)

Piste $(\sqrt{3}, 0)$:

olk. $a = \partial_{11} f(\sqrt{3}, 0) = 6 \cdot \sqrt{3}$

$b = \partial_{12} f(\sqrt{3}, 0) = 0$

$c = \partial_{22} f(\sqrt{3}, 0) = 8$.

Nyt $a > 0$ ja determinantti $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48\sqrt{3} > 0$, joten piste on lokaali minimi.

(2 p.)

Piste $(-\sqrt{3}, 0)$:

Nyt $a = -6\sqrt{3}$

$b = 0$

$c = 8$.

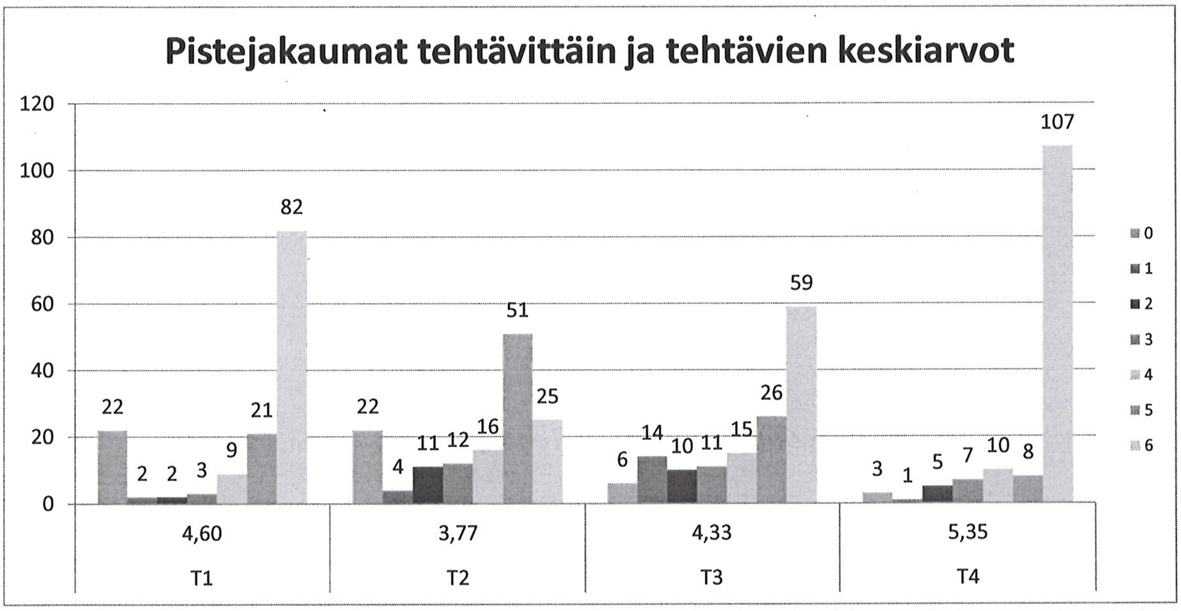
Determinantti $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = -48\sqrt{3} < 0$, joten piste ei ole lokaali ääriarvokohta.

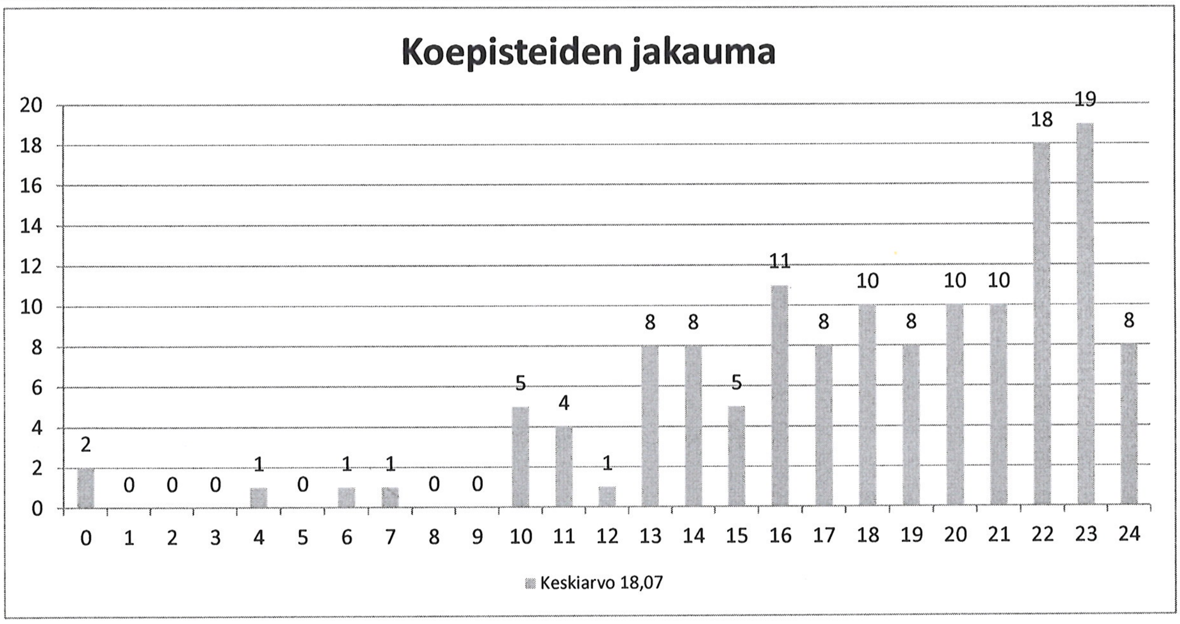
(2 p.)

Vektorianalyysi -14

~~Kurssi, luennoitsija~~

1. kurssikoe





1. kurssikokeen arvosteli Erik Elfving.
Vastaanottoajat ma 13-14, pe 9.30-10.30 (D324)
Ratkomo ke 10-12