



Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä itse laadittu, enintään A4-kokoinen lunttilappu ja taulukkokirja.

Kokeen kesto on 2 tuntia.

- Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on tasajakauma alueessa $0 < x < y < 2$. Johda
 - yhteistiheysfunktio
 - X :n reunatiheysfunktio f_X
 - Y :n reunatiheysfunktio f_Y
 - X :n ehdollinen tiheysfunktio $f_{X|Y}$
 - Y :n ehdollinen tiheysfunktio $f_{Y|X}$
 - Y :n ehdollinen odotusarvo $E(Y | X)$.Kaikissa lausekkeissa muista ilmoittaa lausekkeen pätevyysalue.
- Kolikkoa heitetään toistuvasti kunnes on saatu kolme kruunaa. Olkoon X saatujen klaavojen lukumäärä. Laske
 - EX
 - $P(X < EX)$, $P(X = EX)$ ja $P(X > EX)$
- Satunnaismuuttujilla X ja Y on tasajakauma neliössä $0 < x, y < 1$. Merkitään $U = X^2$ ja $V = Y^3$.
 - Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}(u, v)$.
 - Laske $E(U + V)$.
 - Ovatko U ja V riippumattomat? Perustele.Kaikissa lausekkeissa muista ilmoittaa lausekkeen pätevyysalue.
- Olkoot X_1, \dots, X_{10} riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla kaikilla on normaalijakauma $N(\mu, \sigma^2)$. Määritellään niiden otoskeskiarvo kaavalla

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$$

ja residuaalit kaavalla

$$R_i = X_i - \bar{X}.$$

Johda

- otoskeskiarvon jakauma (nimi ja parametrit, tiheysfunktioita ei tarvita)
- satunnaismuuttujan R_1 jakauma (nimi ja parametrit).



1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x, y) = \frac{k}{1 - x^2}, \quad \text{kun } -1 < x < 1 \quad \text{ja} \quad 0 < y < 1 - x^2,$$

ja nolla muualla.

- Ratkaise vakion k arvo.
- Laske X :n reunatiheysfunktio f_X .
- Laske Y :n ehdollinen odotusarvo $E(Y | X = x)$.

Ratkaisu. (a) f :n täytyy olla kaikkialla epänegatiivinen, ja sen **integraalin yli koko tason pitää olla 1**. Epänegatiivisuus toteutuu kun $k \geq 0$. Integraaliehto on

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^{-1} \left(\int_0^{1-x^2} \frac{k}{1-x^2} dy \right) dx \\ &= k \int_{-1}^{-1} \frac{1}{1-x^2} \left(\int_0^{1-x^2} dy \right) dx \\ &= k \int_{-1}^{-1} \frac{1}{1-x^2} (1-x^2) dx \\ &= k \int_{-1}^{-1} dx \\ &= 2k, \end{aligned}$$

eli $k = 1/2$.

(b) Kun $-1 < x < 1$, niin

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{1-x^2} f(x, y) dy \\ &= \int_0^{1-x^2} \frac{k}{1-x^2} dy \\ &= \frac{k}{1-x^2} \int_0^{1-x^2} dy \\ &= \frac{k}{1-x^2} \cdot (1-x^2) \\ &= k. \end{aligned}$$

Kun $x \leq -1$ tai $x \geq 1$, on X :n tiheys nolla, koska yhteistiheyskin on siellä nolla.

(c) Kun $-1 < x < 1$ ja $0 < y < 1 - x^2$, on

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{k/(1-x^2)}{k} \\ &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Y :n ehdollinen jakauma on siis välin $(0, 1-x^2)$ tasajakauma ja sen odotusarvo on $\frac{1}{2}(1-x^2)$.

2. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$X | Y \sim U(4Y, 4Y + 2),$$

$$Y \sim U(0, 1),$$

missä $U(a, b)$ tarkoittaa tasajakaumaa välillä (a, b) .

(a) Laske EX .

(b) Laske $\text{var } X$.

(c) Kerro perustelun kera, onko satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma jokin tasajakauma ja jos on, missä alueessa.

Ratkaisu. (a) Jos $Y = y$, niin X :n ehdollinen odotusarvo on tasajakauman $U(4y, 4y + 2)$ odotusarvo eli $4y + 1$. **Iteroidun odotusarvon kaavalla (lause 8.3)**

$$EX = E[E(X|Y)] = E[4Y + 1] = 4EY + 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

Vaihtoehtoisesti voisi muodostaa yhteistiheysfunktion ja integroida.

(b) **Lauseen 8.4** mukaisesti

$$\begin{aligned} \text{var } X &= E[\text{var}(X|Y)] + \text{var}[E(X|Y)] \\ &= E\left[\frac{2^2}{12}\right] + \text{var}[4Y + 1] \\ &= \frac{4}{12} + 4^2 \text{var } Y \\ &= \frac{4}{12} + \frac{16}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Vaihtoehtoisesti varianssin voisi laskea iteroidun odotusarvon $E[X^2] = E[E(X^2|Y)]$ avulla, tai muodostamalla yhteistiheysfunktion $f_{X,Y}$ ja integroimalla.

(c) Alueessa, jossa $0 < y < 1$ ja $4y < x < 4y + 2$ (eräs suunnikas) on **kertolaskusäännön (moniste s. 108)** mukaisesti yhteistiheysfunktio

$$f_{X,Y}(X, Y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

eli vakio, joten kyseessä on tasajakauma.

3. Satunnaismuuttujalla X on tasajakauma välillä $(0, 4)$ ja satunnaismuuttujalla Y on eksponenttijakauma odotusarvolla 1 (ts. sen tiheysfunktio on $f_Y(y) = e^{-y}$, kun $y > 0$). Merkitään $U = X$ ja $V = X + Y$.

(a) Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}(u, v)$. Ilmoita tarkasti, missä alueessa se on positiivinen.

(b) Laske V :n reunatiheysfunktio $f_V(v)$.

(c) Laske EV .

Ratkaisu. Jotta tehtävä on ylipäättään laskettavissa, joutuu oletamaan, että X ja Y ovat riippumattomat (muutenhan reunajakaumista ei voi päätellä yhteisjakaumaa). Oletuksen erikseen mainitsemista vastauksessa ei kuitenkaan vaadittu.

(a) Kuvaus $(u, v) = \mathbf{g}(x, y) = (x, x + y)$ on jatkuvasti derivoituva koko tasossa. Sillä on käänteiskuvaus $(x, y) = \mathbf{h}(u, v) = (u, v - u)$, ja sekin on jatkuvasti derivoituva koko tasossa. Kyseessä on siis diffeomorfismi tasolta tasolle, ja voidaan soveltaa **tiheysfunktion muunnoskaavaa (lause 7.8)**.

Vektorin (X, Y) tiheysfunktio on (kun X ja Y oletetaan riippumattomiksi)

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{4}e^{-y}, \quad \text{kun } 0 < x < 4 \text{ ja } 0 < y,$$

ja nolla muualla.

Jacobin determinantti on

$$J_{\mathbf{h}}(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = 1.$$

Kun ytf:n positiivisuusehto esitetään u :n ja v :n avulla, saadaan

$$0 < u < 4 \wedge 0 < v - u$$

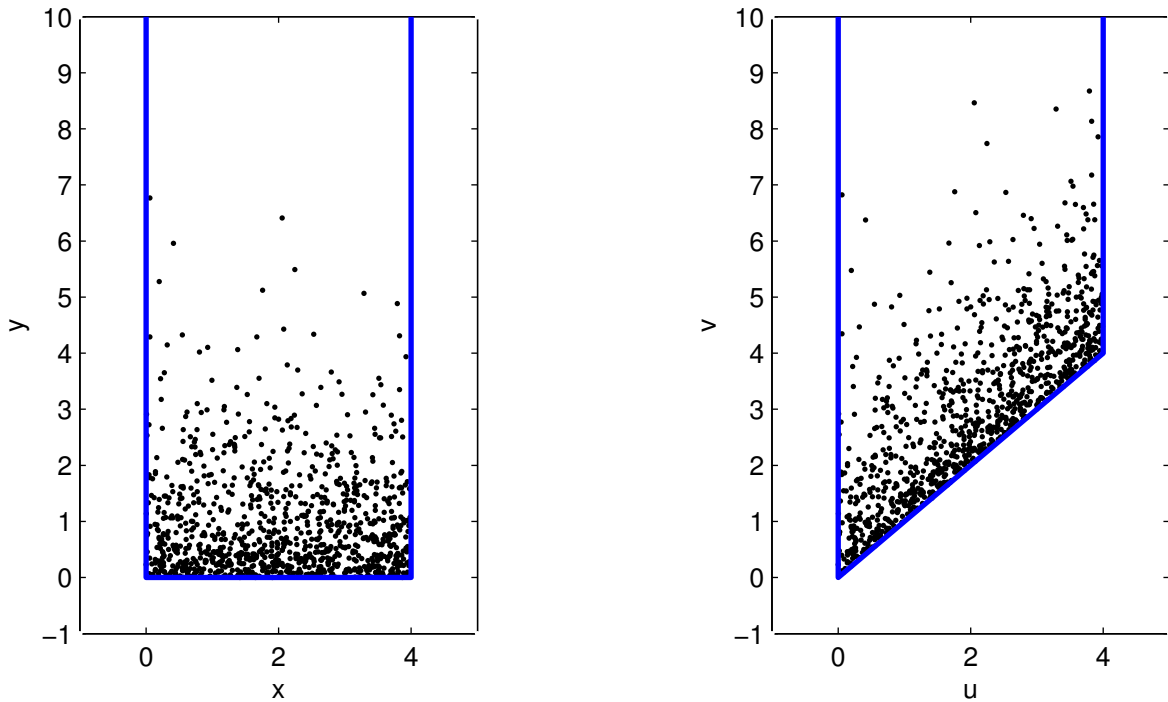
eli yhtäpitävästi

$$0 < u < 4 \wedge u < v.$$

Tässä alueessa pätee muunnoskaavan mukaisesti

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}(x, y) \cdot |J_{\mathbf{h}}(u, v)| \\ &= \frac{1}{4} e^{-y} \cdot |1| \\ &= \frac{1}{4} e^{u-v}, \end{aligned}$$

ja muualla $f_{U,V}(u, v) = 0$.



KUVA 1. Pisteparvilla havainnollistettuna jakaumat $f_{X,Y}(x, y)$ (vasemmalla) ja $f_{U,V}(u, v)$ (oikealla). Yhteistiheys on positiivinen sinisellä viivalla merkityssä alueessa.

- (b) Reunatiheys saadaan yhteistiheydestä integroimalla. Integrointirajojen kanssa on oltava tarkkana. Helpointa on käsitellä erikseen tapaukset $v < 4$ ja $v \geq 4$.

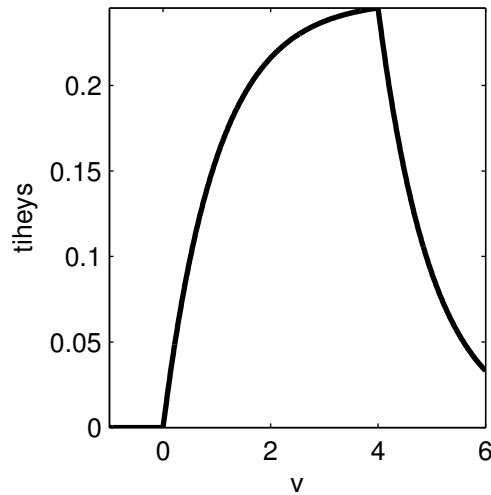
Kun $0 < v < 4$, on ytf positiivinen kun $0 < u < v$, joten

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^v f_{U,V}(u, v) du \\ &= \int_0^v e^{u-v} du \\ &= e^{-v} \int_0^v e^u du \\ &= e^{-v} (e^v - 1) \\ &= 1 - e^{-v}. \end{aligned}$$

Kun $v \geq 4$, on ytf positiivinen kun $0 < u < 4$, joten

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^4 f_{U,V}(u, v) du \\ &= \int_0^4 e^{u-v} du \\ &= e^{-v} \int_0^4 e^u du \\ &= e^{-v}(e^4 - 1). \end{aligned}$$

Lisäksi jos $v \leq 0$, ytf on aina nolla joten tällöin $f_V(v) = 0$.



KUVA 2. V :n reunatiheysfunktio f_V .

- (c) **Odotusarvon lineaarisuuden** nojalla $EV = E[X + Y] = EX + EY = 2 + 1 = 3$.
Voisi myös laskea tiheysfunktion f_V avulla integraalina, mutta se on paljon työläämpää.

4. Tikkatauluun heitetään kaksi tikkaa, joiden osumakohdat ovat $T_1 = (X_1, Y_1)$ ja $T_2 = (X_2, Y_2)$. Kaikki neljä koordinaattia ovat riippumattomat ja standardinormaalijakautuneet.
- Olkoon $T_3 = (X_3, Y_3)$ kahden tikkan osumakohtien geometrinen keskipiste, ts. tikkoja yhdistävän janan keskipiste. Mikä T_3 :n jakauma?
 - Kummastakin tikasta ($i = 1, 2$) saa sakkopisteitä määrän $S_i = X_i^2 + Y_i^2$. Mikä on kokonaissakon $S_1 + S_2$ jakauma?
 - Mikä on kokonaissakon odotusarvo?

Ratkaisu. (a) Keskipisteen x-koordinaatti on $X_3 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, joka on normaalijakautunut odotusarvolla $\frac{1}{2}(EX_1 + EX_2) = 0$ ja varianssilla $(\frac{1}{2})^2(\text{var } X_1 + \text{var } X_2) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$. Siis $X_3 \sim N(0, \frac{1}{2})$. Vastaavasti nähdään että $Y_3 \sim N(0, \frac{1}{2})$. Lisäksi koska X_3 on funktio X_1 :stä ja X_2 :sta, ja Y_3 on funktio Y_1 :stä ja Y_2 :sta, ne ovat riippumattomat.

Tuloksen voi myös ilmaista vektorimuodossa: $T_3 \sim N(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\mathbf{I}_2)$, missä $\mathbf{0}$ tarkoittaa nolla-vektoria ja \mathbf{I}_2 yksikkömatrisia.

- Sakko $X_1^2 + Y_1^2 + X_2^2 + Y_2^2$ on neljän riippumattoman standardinormaalijakautuneen muuttujan neliöiden summa, joten se on määritelmän mukaan χ_4^2 -jakautunut.
- Ratkaisu 1: Koska $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \sim N(0, 1)$, on

$$\begin{aligned} E[X_1^2 + Y_1^2 + X_2^2 + Y_2^2] &= E[X_1^2] + E[Y_1^2] + E[X_2^2] + E[Y_2^2] \\ &= \text{var } X_1 + \text{var } Y_1 + \text{var } X_2 + \text{var } Y_2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

Ratkaisu 2: χ_4^2 -jakauman odotusarvo on sen vapausasteluku eli 4.

Kokeessa saa käyttää MAOL-taulukkokirjaa

1. Bernoullin kokeessa joko onnistutaan tai epäonnistutaan, ja onnistumistodennäköisyys yhdessä kokeessa on $0 < p < 1$. Bernoullin koetta toistetaan riippumattomasti, kunnes onnistutaan r kertaa, jossa $r \geq 1$ on jokin annettu kokonaisluku. Olkoon Y sen toiston järjestysluku, jolla onnistutaan r :nnen kerran (kun ensimmäisen toiston järjestysluku on yksi). Määritellään lisäksi, että X on epäonnistumisten lukumäärä, ennenkuin onnistutaan r :nnen kerran.

Johda lauseke satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyysfunktioille (ptnf). Selitä myös, miten X :n ptnf saadaan laskettua Y :n ptnf:n nojalla.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia välin $(0, 1)$ tasajakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Olkoon Z sen origokeskeisen ympyrän pinta-ala, jonka kaari kulkee pisteen (X, Y) kautta. (Ympyrän pinta-ala $Z = \pi R^2$, ja ympyrän säde $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$).

Laske EZ ja $\text{var } Z$.

3. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x, y) = 8xy, \quad \text{kun } 0 < x < y < 1,$$

ja nolla muualla. Laske muuttujien X ja Y reunajakaumien tiheysfunktiot, ehdolliset tiheysfunktiot $f_{X|Y}$ sekä $f_{Y|X}$ sekä ehdolliset odotusarvot $E[X | Y = y]$ ja $E[Y | X = x]$.

4. Olkoot X ja Y riippumattomia eksponenttijakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia siten, että $EX = EY = 1$. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = X + Y, \quad V = X - Y.$$

Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio. Laske lisäksi satunnaismuuttujan U reunatiheysfunktio.

5. Olkoon satunnaisvektorilla \mathbf{X} n -ulotteinen normaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalinen matriisi (eli $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään satunnaisvektori \mathbf{Y} kaavalla

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q} \mathbf{X}.$$

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ kahtia siten, että vektori $\mathbf{U} = (Y_1, \dots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista ($1 \leq k < n$) ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \dots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T \mathbf{U}, \quad Z_2 = \mathbf{V}^T \mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin \mathbf{Y} jakauma?

b) Perustele, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mikä on satunnaismuuttujan Z_1 reunajakauma? Mikä on satunnaismuuttujan Z_2 reunajakauma?

Sallitut apuvälineet: MAOL-taulukot, kirjoitusvälineet, laskin sekä itse laadittu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x, y) = kxy, \quad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla.

a) Ratkaise vakion k arvo.

b) Laske $P(0 < X < \frac{1}{2} \text{ ja } Y < X^2)$.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(1)$ noudattavia satunnaismuuttujia. (Tämän jakauman tiheysfunktio on $f(z) = e^{-z}$, kun $z > 0$.) Määritellään positiiviset satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = XY, \quad V = X^2.$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}(u, v)$, satunnaismuuttujan V reunatiheysfunktio $f_V(v)$ sekä $f_{U|V}(u | v)$ eli satunnaismuuttujan U ehdollinen tiheysfunktio, kun $V = v$ (jossa $v > 0$).

3. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X | Y &\sim N(0, (Y^2)^2) \\ Y &\sim U(0, 1). \end{aligned}$$

$N(\mu, \sigma^2)$ on normaalijakauma odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2 , ja $U(a, b)$ on tasajakauma välillä (a, b) .

a) Laske EX .

b) Laske $\text{var } X$.

c) Kerro perustelun kera, onko satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma kaksiulotteinen normaalijakauma

4. Olkoon n -ulotteisella satunnaisvektorilla \mathbf{X} standardinormaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalinen vakiomatriisi (ts. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{X}$.

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ kahtia siten, että $\mathbf{U} = (Y_1, \dots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista (jossa $1 \leq k < n$) ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \dots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään lopuksi satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T \mathbf{U}, \quad Z_2 = \mathbf{V}^T \mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin \mathbf{Y} jakauma?

b) Perustelee, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mitkä ovat satunnaismuuttujien Z_1 ja Z_2 jakaumat?