

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 12. harjoitus (8.–12.12.2014)

1. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$X \sim N(0, 1) \\ Y | (X = x) \sim N(0, x^2).$$

Onko satunnaisvektorilla (X, Y) normaalijakauma? Miksi / miksei? (Vihje: Mitä tiedetään moniulotteisen normaalijakauman ehdollisista jakaumista?)

2. (Diskreettiaikainen, jatkuvatilainen satunnaiskävely.) Alkeishiukkanen lähtee origosta ja liikkuu lukusuoralla siten, että i :n sekunnin aikana se siirtyy matkan $X_i \sim N(0, 1)$. Siirtymät ovat keskenään riippumattomat. Sijainti k :n sekunnin kuluttua alkuhetkestä on

$$Y_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

Olkoon $n > 1$. Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ jakauma? (Vihje: Esitä ensin siirtymät satunnaisvektorina \mathbf{X} , sitten \mathbf{Y} niiden muunnoksena. Voit aluksi tutkia havainnollisuuden vuoksi tilannetta pienillä n :n arvoilla, esim. $n = 2$ tai $n = 3$.)

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mikä on satunnaismuuttujien Y_5 ja Y_6 yhteisjakauma? (Vihje: Saat reunajakauman edellisen tehtävän jakaumasta helposti.) Laske sitten ehdolliset jakaumat $Y_6 | (Y_5 = 10)$ ja $Y_5 | (Y_6 = 10)$. Ne ovat lauseen 10.6 perusteella normaalijakaumia, mutta millä parametreilla?

4. Olkoot satunnaismuuttujat X_1, \dots, X_n riippumattomia, ja niillä kaikilla normaalijakauma $N(\mu, \sigma^2)$, missä μ on tunnettu, mutta σ^2 on tuntematon. Määritellään estimaattori

$$Z = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Tällöin Z :lla on eräs gammajakauma. Laske sen parametrit. (Käytä gammajakauman tunnettuja ominaisuuksia jaksoista 5.3.4 ja 5.3.7.) Laske EZ ja var Z .

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Otosvarianssin S^2 jakauma on laskettu lauseessa 10.7. Mitä ovat ES^2 ja var S^2 ? Vertaa niitä Z :n odotusarvoon ja varianssiin. Kuvaile havaintojasti sanallisesti, esim. kun havaintojen lukumäärä on $n = 30$.

6. Kurssin *Johdatus tilastolliseen päättelyyn* osallistujilta kysyttiin keväällä 2012 (nimettömästi) ikä, pituus ja paino. Tarkastelemme tämän kyselyn tulosten perusteella muodostettua normaalijakaumamallia miespuolisten opiskelijoiden ominaisuuksille. Miesopiskelijan ikä A (vuosia), pituus L (cm) ja paino W (kg) mallinnetaan kolmiulotteisella normaalijakaumalla siten, että sv:lle $\mathbf{V} = (A, L, W)$

$$E\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 24 \\ 180 \\ 77 \end{bmatrix}, \quad \text{Cov } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 29 \\ 0 & 51 & 42 \\ 29 & 42 & 183 \end{bmatrix}$$

Moniulotteisen normaalijakauman ehdolliset jakaumat selviävät jaksosta 10.7.

- a) Mikä on miesten painon (reuna-)jakauma?
- b) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a)$. Mikä on 28 vuotta vanhojen miesten painon jakauma?
- c) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a, L = l)$. Mikä on 28 vuotta vanhojen ja 175 cm pitkien miesten painon jakauma?

7. Selitä, miksi edellisen tehtävän normaalijakaumamallissa A ja L ovat riippumattomia. Ovatko ikä A ja pituus L ehdollisesti riippumattomia, jos paino W on tunnettu?