Todennäköisyyslaskennan kurssi, 11. harjoitus (1.–5.12.2014)

1. Olkoon satunnaisvektori $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ standardinormaalijakautunut.

(a) Kirjoita neliömatriisi $\mathbf{A}$, jolla kertominen venyttää x-koordinaatin viisinkertaiseksi, mutta ei tee muuta.

(b) Kirjoita neliömatriisi $\mathbf{B}$, jolla kertominen vastaa kiertoa 90 astetta vastapäivään.

(c) Laske matriisi $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$.

(d) Mikä on vektorin $\mathbf{Y} = \mathbf{CU}$ jakauma?

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske matriisien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ käänteismatriisit, ja laske sitten tulo $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$. Totea, että se on $\mathbf{C}$:n käänteismatriisi. Mikä on vektorin $\mathbf{Z} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}$ jakauma?

3. Tikkatauluun heitetään riippumattomasti kaksi tikkaa, joiden osumakohdat $\mathbf{T_1} = (X_1, Y_1)$ ja $\mathbf{T_2} = (X_2, Y_2)$ ovat standardinormaalijakautuneet.

(a) Mikä on vektorin $\mathbf{Z} = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ jakauma?

(b) Muodosta sellainen matriisi $\mathbf{A}$, että vektorissa $\mathbf{AZ}$ on kaksi alkiota, jotka ovat tikkojen välisen janan keskipisteen (ts. tikkojen otoskeskiarvon) koordinaatit. Laske vektorin $\mathbf{AZ}$ jakauma.

(c) Muodosta sellainen matriisi $\mathbf{B}$, että vektori $\mathbf{BZ} = \mathbf{T_2} - \mathbf{T_1}$. Laske vektorin $\mathbf{BZ}$ jakauma.

4. Olkoon satunnaisvektori $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ sellainen, että

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Merkitään lisäksi $\mathbf{Y} = (X_2, X_3)$. Laske (ts. lue annetusta matriisista, toki voit myös ensin esittää tarkasteltavat skalaarit ja vektorit $\mathbf{X}$:n lineaarikuvauksina): a) $\mathrm{var}(X_1)$, b) $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$, c) $\mathrm{cov}(X_1, \mathbf{Y})$.

5. (Choleskyn hajotelma.) Olkoon $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. Etsi jokin sellainen alakolmiomatriisi $\mathbf{A}$, että $\mathbf{AA}^T = \mathbf{C}$. Vihje: alakolmiomatriisi on muotoa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$. Kirjoita matriisitulo auki ja saat neljä yhtälöä, joista tosin kaksi on samoja (miksi?). Ratkaise yhtälöryhmä.

6. (Choleskyn hajotelma kovarianssimatriisille.) Esitetään satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = (X, Y)$ kovarianssimatriisi muodossa

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}.$$

Etsi edellisen tehtävän tapaan sellainen alakolmiomatriisi $\mathbf{A}$, että $\mathbf{AA}^T = \mathbf{C}$. (Tehtävän tuloksena on löydetty sellainen lineaarikuvaus, että jos $\mathbf{U}$ on standardinormaalijakautunut, niin $\mathbf{AU}$ on normaalijakautunut halutulla kovarianssimatriisilla $\mathbf{C}$.)