Todennäköisyyslaskennan kurssi, 10. harjoitus (24.–28.11.2014)

1.

(a) Etsi beetajakauman moodi tiheysfunktiota derivoimalla. Rajoitutaan tässä yksinkertaisuuden vuoksi tapauksiin, joissa $\alpha, \beta > 1$. Totea, ettei moodi yleensä ole odotusarvon kohdalla. Millä beetajakaumilla ne ovat samat?

(b) Beetajakauman mediaani on vähän hankala laskea yleisesti. Tutkitaan erityisesti jakaumaa $\text{Be}(3, 2)$. Laske sen kertymäfunktio $F(x)$ keskiarvon ja moodin kohdalla ja päättele siitä, että mediaani on jossain niiden välissä. (Mediaanin sijainnin voisi tarkemmin selvittää ratkaisemalla 4. asteen polynomiyhtälön tai haarukoimalla nollakohtaa numeerisesti.)

(c) Kaverisi on jostain syystä vakuuttunut, että mediaani, moodi ja odotusarvo ovat sama asia. Miten selittäisit asian hänelle selkeästi mutta lyhyesti? Selitys voi olla esim. sanallinen, numeerinen tai kuvallinen. Voit käyttää esimerkkeinä joitain tiettyjä jakaumia, tai selittää asian yleisellä tasolla.

2. *Ohennettu Poisson-prosessi.* Tutustu luentomateriaalin esimerkkiin 8.3. Laske yhteisjakaumasta X:n reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio ja osoita, että se on $\text{Poi}(\lambda\theta)$-jakauman ptnf. *Vihje.* Aloita muodosta $f_X(x) = \sum_{y=x}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)$. (Yptnf voi olla positiivinen vain kun $y \leq x$, miksi?) Hajota summassa esiintyvä tekijä λ^y muotoon $\lambda^x \lambda^{y-x}$. Sievennä summaa siirtämällä y:stä riippumattomia tekijöitä summan ulkopuolelle. Sievennä summaa merkinnällä $u = y - x$ ja tunnista summa erään eksponenttifunktion sarjakehitelmäksi.

3. *Ohennettu Poisson-prosessi.* Eräitä hiukkasia syntyy fysikaalisessa kokeessa keskimäärin 1000 kpl sekunnissa. Tarkemmin: kun koe kestää T sekuntia, hiukkasten lukumäärä on $\text{Poi}(1000T)$-jakautunut. Kukin hiukkanen hajoaa saman tien joko tyypin A tai tyypin B hajoamisreaktiossa; tyypin B todennäköisyys on yksi miljoonasta.

(a) Mikä on tyypin B hajoamisten lukumäärän jakauma, kun koe kestää T sekuntia? (Voit olettaa tunnetuksi edellisessä tehtävässä todistetun tuloksen.)

(b) Kuinka pitkään kokeen täytyy kestää, jotta ainakin 80 prosentin todennäköisyydellä tapahtuu ainakin yksi tyypin B hajoamisreaktio?

4. Todista lause 8.4 tapauksessa $g(X, Y) = Y$, toisin sanoen todista, että

$$\operatorname{var} Y = Ev(X) + \operatorname{var} m(X),$$

kun $v(x) = \operatorname{var}(Y \mid X = x)$ ja $m(x) = E(Y \mid X = x)$. Vihje: Y:n varianssi on $EY^2 - (EY)^2$. Kummankin tässä esiintyvän odotusarvon voi esittää X:n avulla iteroituna odotusarvona.

5. Tarkastellaan hierarkkista mallia, jossa $X \sim U(0, 1)$ ja $Y \mid (X = x) \sim U(0, x)$.

(a) Laske yhteistiheysfunktio.

(b) Onko vektorilla (X, Y) tasajakauma?

(c) Laske $E[Y \mid X = x]$ ja $\operatorname{var}[Y \mid X = x]$.

(d) Laske EY iteroidun odotusarvon kaavalla.

(e) Laske EY lauseen 7.7 mukaisena integraalina ytf:n avulla.

6. Erästä kolikkoa heitetään n kertaa. Kruunien lukumäärää kuvataan hierarkkisella mallilla

$$\Theta \sim \mathrm{Be}(2,2)$$
$$X \mid (\Theta = \theta) \sim \mathrm{Bin}(n,\theta).$$

Karkeasti ottaen mallissa oletetaan, että Θ voi olla mitä tahansa välillä $(0,1)$, mutta hiukan todennäköisemmin lähellä keskikohtaa kuin ääripäissä. Uskomme siis, että kolikko on luultavasti kohtuullisen reilu.

(a) Laske $P(X = 50)$, $P(X = 70)$ ja $P(X = 100)$, kun $n = 100$. (Tarvitset X:n reunajakauman, jonka saat esim. integroimalla yhteisjakaumaa θ:n suhteen ja tunnistamalla integraalista beetafunktion.)

(b) Laske samojen tapahtumien todennäköisyydet ei-hierarkkisessa mallissa, jossa $X \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{1}{2})$ (tavallinen toistokoe). Numeerinen tulos riittää, ei tarvita tarkkaa murtolukulauseketta.

(c) Luonnehdi a- ja b-kohdan tulosten eroa sanallisesti.

Huom. Jos käytettävissäsi ei ole laskinta tai tietokonetta, joka pystyy laskemaan riittävän isoja gammafunktioita ja kertomia, voit hyödyntää tehtäväpaperin lopussa olevia likiarvoja. (Isoja kertomia voisi approksimoida myös Stirlingin kaavalla.) Muista että $(k+1)! = k! \cdot (k+1)$. Lisäksi voit tarvita tietoa, että $2^{100} \approx 1.27 \cdot 10^{30}$.

7. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat ja kumpikin standardinormaalijakautuneet (katso tiheysfunktio luentomonisteen sivulta 78).

(a) Kirjoita vektorin (X, Y) yhteistiheysfunktio $f_{X,Y}$.

(b) Tutki minkä muotoisia ovat ytf:n tasa-arvokäyrät, ts. millaisilla vektoreilla (x, y) pätee $f_{X,Y}(x, y) = c$, missä c on jokin vakio.

(c) Etsi ytf:n maksimikohta. Vihje: Koska logaritmi on säilyttää suuruusjärjestyksen, voit yhtä hyvin etsiä funktion $l(x, y) = \log f_{X,Y}(x, y)$ maksimikohdan. Voit joko tarkastella funktion lauseketta sellaisenaan, tai etsiä missä molemmat osittaisderivaatat ovat nollia.

Kertoman likiarvoja

k	$k!$
20	$2.43 \cdot 10^{18}$
30	$2.65 \cdot 10^{32}$
40	$8.16 \cdot 10^{47}$
50	$3.04 \cdot 10^{64}$
60	$8.32 \cdot 10^{81}$
70	$1.20 \cdot 10^{100}$
80	$7.16 \cdot 10^{118}$
90	$1.49 \cdot 10^{138}$
100	$9.33 \cdot 10^{157}$