Todennäköisyyslaskennan kurssi, 8. harjoitus (10.–14.11.2014)

1. Olkoon $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ ja $g(x) = \sin \pi x$.

(a) Mitä Jensenin epäyhtälö sanoo suureesta $Eg(X)$?

(b) Laske $g''(x)$ ja totea, että se on $\geq -\pi^2$ kaikilla $0 < x < 1$. Arvioi suuretta $Eg(X)$ tehtävässä 7:5 johdetun epäyhtälön avulla.

(c) Laske $Eg(X)$ tarkasti ja vertaa edellä laskettuihin rajoihin.

2. Kahden hehkulampun kestoajat X ja Y ovat riippumattomat ja kumpikin Exp(1)-jakautuneet. Kirjoita niiden yhteistiheysfunktio $f_{X,Y}$. Tutki, missä pisteissä (x, y) ytf saa tietyn vakioarvon, ts. ratkaise yhtälö $f_{X,Y}(x, y) = c$. Ratkaisun perusteella hahmottele ytf:n muotoa piirtämällä muutamia sen tasa-arvokäyriä eli "korkeuskäyriä" (esim. käyrä, jolla ovat ne pisteet (x, y) joissa ytf saa saman arvon kuin pisteessä $(1, 0)$, ja muutamia muita vastaavia käyriä).

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Olkoon z jokin luku. Laske integroimalla (Fubinin lauseen avulla) $F_Z(z) = P(Z \leq z)$, kun $Z = X + Y$. Laske seuraavaksi Z:n tiheysfunktio kertymäfunktiota derivoimalla, ja tunnista Z:n jakauma, jos se on jotain tuttua muotoa.

4. Kahden hehkulampun kestoajat X ja Y ovat riippumattomat, $X \sim \mathrm{Exp}(1/2)$ ja $Y \sim \mathrm{Exp}(1/3)$. Hahmottele ytf:n muotoa piirtämällä tasa-arvokäyriä.

5. Satunnaisvektorilla (X, Y) on *Dirichlet-jakauma* parametrein (a, b, c), merkitään $(X, Y) \sim \mathrm{Dir}(a, b, c)$, jos sillä on tiheysfunktio

$$f_{X,Y}(x, y) = k\, x^{a-1} y^{b-1} (1 - x - y)^{c-1} \qquad \text{kolmiossa } x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1.$$

Luku $k = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}$ on normalisointivakio, ja parametrien a, b, c tulee olla positiivisia. Dirichlet-jakaumalla on paljon käyttöä erityisesti ns. Bayes-tilastotieteessä. Tarkastelemme tässä tehtävässä vain tapausta $(X, Y) \sim \mathrm{Dir}(2, 2, 1)$.

(a) Laske EX monisteen lauseen 7.7 avulla. Vihje: Ulomman integraalin voi laskea purkamalla integrandin polynomiksi, mutta vähemmillä laskuilla selviää hyödyntämällä monisteen kaavoja (5.7) ja (5.8), s. 74–75.

(b) Laske X:n (reuna)tiheysfunktio ja tunnista siitä, että X:llä on eräs beetajakauma. Tarkista että sen odotusarvo täsmää a-kohdassa laskettuun.

6. Olkoon $(X, Y) \sim \mathrm{Dir}(1, 1, 1)$. Totea tiheysfunktiosta, että kyseesä on tasajakauma kolmiossa.

(a) Laske EX, EY ja EXY.

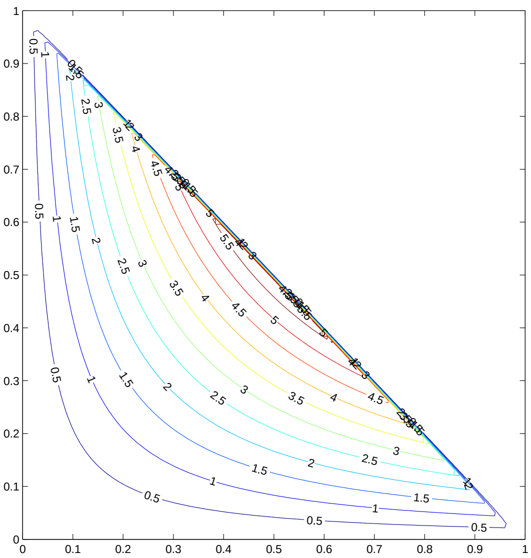
(b) Laske paras lineaarinen ennuste Y:lle, ts. laske ennustesuoran $m(x) = \alpha + \beta(x - EX)$ parametrit.

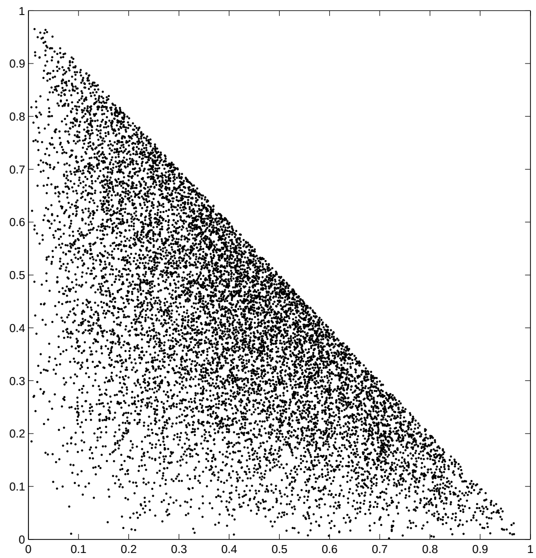
7. Tikkataulu on ympyräkiekko, jonka keskipiste on origossa ja säde on 1. Tikan osumakohdalla (X, Y) on tasajakauma koko tikkataulussa.

(a) Laske X:n reunatiheysfunktio. Vihje: Ympyrän kehäpisteissä pätee yhtälö $x^2 + y^2 = 1$. Mille välille sijoittuvat Y:n arvot, kun $X = x$?

(b) Tutki, onko $X \perp\!\!\!\perp Y$. Vihje: tutki esim. tapahtumia $\{X > 0.9\}$ ja $\{Y > 0.9\}$.

Lisätietoa. Jos yhteistiheysfunktion lauseke tunnetaan, tasa-arvokäyriä voi piirtää esim. Matlabissa komennolla `contour` ja perspektiivikuvia komennolla `surf`. Alla vasemmalla on havainnollistettu tehtävän 5 jakaumaa tasa-arvokäyrillä. Oikealla sama jakauma pisteparvena.





Tasa-arvokäyrät piirrettiin tällaisella Matlab-koodilla.

```
% Jakauman parametrit
a = 2;
b = 2;
c = 1;
k = gamma(a+b+c) / gamma(a)*gamma(b)*gamma(c);

% Luodaan ruudukko pisteitä (x,y),
% joissa tiheysfunktio aiotaan laskea.
xvalues = linspace(0,1);
yvalues = linspace(0,1);
[x,y]   = meshgrid(xvalues,yvalues);

% Lasketaan tiheysfunktio.
% Huom. viimeisenä kolmioalueen indikaattori.
f = k .* x.^(a-1) .* y.^(b-1) .* (1-x-y).^(c-1) .* (x+y<1);

% Piirretään tasa-arvokäyrät.
[C,H] = contour(x,y,f);
clabel(C,H);
```