Todennäköisyyslaskennan kurssi, 7. harjoitus (3.–7.11.2014)

1. Olkoon $a \geq 1$ eräs luku ja X eräs satunnaismuuttuja. Osoita, että jos X:n jakaumasta tiedetään vain, että $X \geq 0$ ja $EX = \mu$, Markovin epäyhtälöä $P(X \geq a\mu) \leq 1/a$ ei voi tiukentaa, ts. on olemassa jokin satunnaismuuttuja X, jolle se pätee yhtälönä. (Vihje: Tutki jotakin hyvin yksinkertaista diskreettiä jakaumaa.)

2. Osoita, että jos g on *affiini funktio* $g(x) = ax + b$, niin Jensenin epäyhtälö pätee yhtälönä, eli tällöin $Eg(X) = g(EX)$.

3. Olkoon $X > 0$ sellainen satunnaismuuttuja, että odotusarvot EX, $E(1/X)$ ja $E\ln(X)$ ovat kaikki reaalilukuja. Mitä voit sanoa Jensenin epäyhtälön avulla

a) lukujen $1/EX$ ja $E(1/X)$ suuruusjärjestyksetä, ja

b) lukujen $\ln(EX)$ ja $E\ln(X)$ suuruusjärjestyksestä?

c) Laske edellä kerrotut neljä suuretta (tai niiden likiarvot), kun X:llä on välin $(1, 2)$ tasajakauma, ja tarkista tällä tavalla, että sait edellä järkeiltyä suuruusjärjestyksen oikein päin.

4. Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, mitä voit sanoa Jensenin epäyhtälön avulla lukujen $(EX)/(EY)$ ja $E(X/Y)$ suuruusjärjestyksestä? Vihje: tutki satunnaismuuttujaa $1/Y$ ja muista lauseet 3.7 ja 4.3.

5. Jensenin epäyhtälö antaa suureelle $Eg(X)$ vain alarajan. Tutkitaan, saadaanko suureelle myös yläraja, jos funktion g kaarevuutta pystytään rajoittamaan. Olkoon $X \sim U(0, 1)$, jolloin tietysti $\mu = EX = 1/2$. Olkoon g kahdesti derivoituva funktio, $g'(\mu) = k$, ja

$$0 \leq g''(x) \leq M$$

kaikilla $0 < x < 1$.

(a) Johda kussakin pisteessä $x \in (0, 1)$ mahdollisimman tiukka ala- ja yläraja derivaatalle $g'(x)$. Vihje: integroi toista derivaattaa ja käytä hyväksi sen rajoja. Huom: yläraja riippuu x:stä!

(b) Johda kussakin pisteessä $x \in (0, 1)$ mahdollisimman tiukka ala- ja yläraja suureelle $g(x)$. Vihje: integroi ensimmäistä derivaattaa ja käytä hyväksi a-kohtaa.

(c) Johda mahdollisimman tiukka ala- ja yläraja suureelle $Eg(X)$. Vihje: $Eg(X) = \int_0^1 g(x)dx$.

6. Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ aidosti positiivisia lukuja. Niiden aritmeettinen keskiarvo $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Tämän lisäksi tarkastelemme lukujen x_i geometrista keskiarvoa G, joka määritellään kaavalla

$$G = [x_1 x_2 \ldots x_n]^{1/n}.$$

Todista epäyhtälö

$$G \leq A$$

seuraavien ohjeiden avulla. Määritellään diskreetti satunnaismuuttuja X siten, että se saa todennäköisyydellä $1/n$ arvokseen luvun x_i (kun $i = 1, \ldots, n$). Tällöin tietysti $EX = A$. Tutki suureita $E\ln(X)$ ja $\ln G$ ja selvitä, mitä tekemistä niillä on keskenään. Hyödynnä 3. tehtävässä todettua lukujen $\ln(EX)$ ja $E\ln(X)$ välistä suuruusjärjestystä.

7. Tässä tehtävässä osoitamme, että kaikista suorakulmioista, joilla on sama pinta-ala A, neliö on se jolla on pienin piiri (= sivujen pituuksien summa).

Tarkastellaan yksittäistä sellaista suorakulmiota, jonka kanta on a ja korkeus b, siten että pinta-ala $ab = A$. Suorakulmion piiri on $2(a + b)$. Laske pinta-alaltaan samankokoisen neliön piiri, ja todista että suorakulmion piiri ei voi olla pienempi. (Vihje: Jensenin epäyhtälö, tai edellisessä tehtävässä todistettu epäyhtälö aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välillä.)