Todennäköisyyslaskennan kurssi, 6. harjoitus (13.–17.10.2014)

1. Johda Geom(p)-jakauman kertymäfunktiolle yksinkertainen lauseke, jossa ei esiinny pitkää summausta. (Vihje: Geometrinen sarja.) Laske $P(1000 \le X \le 2000)$, kun $X \sim \text{Geom}(1/1000)$.

2. Erään satunnaismuuttujan X odotusarvo on 0, varianssi on 1 ja vinous on $S(X) = s$ (ks. harjoitus 5:6). Laske seuraavien satunnaismuuttujien vinoudet: (a) $Y = X + b$; (b) $Z = aX$ (missä $a > 0$); $W = -X$.

3. Kolikkoa heitetään toistuvasti, kunnes on saatu 3 kruunaa. Olkoon X saatujen klaavojen määrä.

(a) Laske EX.

(b) Laske kahden peräkkäisen pistetodennäköisyyden suhde $w(x) = f(x+1)/f(x)$ mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa, josta binomikertoimet ja kertomat on sievennetty pois. (Muista, että esim. $(x+1)! = (x+1) \cdot x!$)

(c) Etsi se tai ne arvot x, joilla ptnf $f(x)$ on suurin (ns. moodi). Vihje: Aloita taulukoimalla ptnf:ää pienillä x:n arvoilla ja hahmottele funktiota kuvallisesti. Kun luvut näyttävät kääntyvän laskuun, hyödynnä b-kohdan tulosta osoittaaksesi, että jatkossa ne varmasti aina pienenevät eli suhdeluku $w(x) < 1$.

4. Eräässä fysikaalisessa kokeessa tapahtuu X kappaletta tyypin A ja Y kappaletta tyypin B hajoamisreaktioita. X ja Y ovat kumpikin riippumattomasti Poi(1)-jakautuneet. Laske todennäköisyys, että kumpaakin reaktiotyyppiä tapahtuu yhtä monta ja tasan k kappaletta (ts. $P((X = k) \cap (Y = k))$), kun $k = 0, 1, 2, 3$.

Olkoon S edellä laskettujen todennäköisyyksien summa. Selitä, miksi $P(X = Y) \ge S$. Miten laskisit tarkemman alarajan tn:lle $P(X = Y)$?

5. Laske tarkat numeeriset arvot seuraaville integraaleille:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-2x} dx$$

ja

$$\int_0^1 x(1-x)^5 dx.$$

Vihjeitä: Gammafunktio ja beetafunktio jaksosta 5.2. (Jälkimmäisen integraalin voisi laskea myös työläästi avaamalla binomin $(1-x)$ potenssin ja integroimalla näin saatua polynomia.)

Hahmottele integrandien (ts. integraalien sisällä olevien lausekkeiden) kuvaajat ja vertaa silmämääräisesti käyrien alle jääviä pinta-aloja edellä laskettuihin arvoihin.

6. Hahmottele gammafunktion kulkua laskemalla $\Gamma(t)$ kokonaisluvuille $t = 1, 2, 3, 4$ ja puoliluvuille $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ tarkasti, ja piirtämällä sitten funktion kuvaaja. Vihje: Yhtälö (5.4) pätee vaikka t ei olisi kokonaisluku.

7. Tikkataulun keskipiste on origossa. Tikkaa heitetään siten, että X- ja Y-koordinaattti (senttimetreinä) ovat riippumattomasti normaalijakautuneet odotusarvolla 0 ja hajonnalla 10. Mikä on suureen $Z = R^2$ jakauma, kun $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ on tikan etäisyys origosta?

Mikä on Z:n kertymäfunktio? Laske sen avulla R:n mediaani.

Vihje: Kappaleet 5.3.7 ja 5.3.4. Jos haluat voit vaihtaa mittayksikköä ja tarkastella etäisyyksiä esim. desimetreinä.