

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 5. harjoitus (6.–10.10.2014)

1. (Luvut $g(EX)$ ja $Eg(X)$ ovat yleensä erisuuret.) Laske $g(EX)$ ja $Eg(X)$, kun $g(x) = x^3$ ja

a) X noudattaa diskreettiä tasajakaumaa joukossa $\{0, 1, 2\}$,

b) $X \sim U(0, 2)$.

2. Mitataan kellonaikaa muuttujalla t , joka osoittaa mikä osuus vuorokaudesta on kulunut keskiyön jälkeen (esim. keskipäivällä $t = 0.5$). Olkoon auringon korkeuskulma asteina horisontista kellonajan funktio $h(t) = -10 - 30 \cos(2\pi t)$. Laske $E[h(T)]$, kun

(a) $T \sim U(0, 1)$

(b) $T \sim U(a, b)$, missä a ja b ovat ne kellonajat, jolloin $h(t) = 0$.

Hetket a ja b voi ratkaista numeerisina likiarvoina.

Huom. Korkeuskulmaa kuvaava funktio on tässä tarkoituksellisesti yksinkertaistettu.

3. Jatkoa edelliseen tehtävään (*edelleen karkea yksinkertaistus*). Aurinkopaneelin hetkellinen teho on $p(t) = c \cdot h(t)^2$, jos $h(t) > 0$, ja nolla muuten. Tässä c on eräs vakio. Laske $E[p(T)]$, kun $T \sim U(0, 1)$. Vihje: Kosinin neliön voi esittää $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, mikä helpottaa integrointia. Luultavasti joudut lisäksi käyttämään sijoitusmenetelmää.

4. Olkoot X ja Y sellaisia satunnaismuuttujia, joille

$$EX = -1, \quad EY = 1, \quad EX^2 = 3, \quad EY^2 = 4, \quad E(XY) = 1.$$

Laske (a) $\text{var } X$, (b) $\text{var } Y$, (c) $\text{cov}(X, Y)$, (d) $\text{var}(2X - Y)$.

5. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$EX_1 = 1, \quad EX_2 = 2, \quad \text{var } X_1 = 1, \quad \text{var } X_2 = 3.$$

Määritellään

$$Y = 2014 - 10X_1 + 2X_2, \quad Z = 3 + X_1 - 2X_2.$$

Laske EY , EZ , $\text{var}(Y)$, $\text{var}(Z)$ ja $\text{cov}(Y, Z)$.

6. Määritellään satunnaismuuttujan X *vinous* (engl. *skewness*) kaavalla

$$S(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

missä $\mu_3 = E[(X - EX)^3]$ on kolmas keskusmomentti ja σ on keskihajonta. Laske $S(X)$, kun X on jatkuva sm tiheysfunktiolla

(a) $f(x) = 2x$, kun $0 < x < 1$, ja nolla muuten;

(b) $f(x) = 2 - 2x$, kun $0 < x < 1$, ja nolla muuten.

7. Jatkoa edelliseen tehtävään. Millä tasajakaumalla $U(a, b)$ on sama odotusarvo ja varianssi kuin a-kohdan jakaumalla? Laske sen *vinous*.

8. Johda EX^4 , kun $X = \mu + \sigma Z$ ja Z on satunnaismuuttuja, jonka neljä ensimmäistä (origo)momenttia ovat

$$EZ = EZ^3 = 0, \quad EZ^2 = 1, \quad EZ^4 = 3.$$

(Tulet johtaneeksi kaavan normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ neljännelle momentille, koska jakaumalla $N(0, 1)$ on yllä luetellut momentit.)