

Todennäköisyytlaskennan kurssi, 4. harjoitus (29.9.–3.10.2014)

1. Logistinen jakauma parametreilla $\mu \in \mathbb{R}$ ja $s > 0$ voidaan määritellä siten, että se on satunnaismuuttujan Y jakauma, kun

$$Y = \mu + s \ln \frac{X}{1-X},$$

ja $X \sim U(0,1)$. Johda logistisen jakauman tiheysfunktio.

2. Kukin ihminen kuuluu ABO-veriryhmäjärjestelmässä täsmälleen yhteen neljästä veriryhmästä O, A, B tai AB. Merkitään henkilön veriryhmää satunnaismuuttujalla X , jonka mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3 ja 4.

Kukin ihminen on lisäksi joko reesusnegatiivinen tai -positiivinen. Merkitään tätä vastaavasti satunnaismuuttujalla Y , jonka arvot ovat 1 ja 2.

Suomessa veriryhmien esiintyvyydet ovat seuraavan taulukon mukaiset.

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 1$	0.04	0.06	0.02	0.01
$Y = 2$	0.27	0.38	0.15	0.07

Suomen väestöstä poimitaan umpimähkään yksi henkilö.

- Laske reunatodennäköisyydet $P(X = x)$ kaikille $x = 1, 2, 3, 4$.
- Laske reunatodennäköisyydet $P(Y = y)$.
- Laske ehdolliset todennäköisyydet $P(X = x | Y = y)$ kaikille $x = 1, 2, 3, 4$ ja $y = 1, 2$.
- Ovatko X ja Y riippumattomat?

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Väestöstä poimitaan umpimähkään kaksi henkilöä. Millä todennäköisyydellä he kuuluvat

- samaan ABO-veriryhmään,
- samaan reesusveriryhmään (molemmat positiivisia tai molemmat negatiivisia)?

4. Väestö on jaettu neljään ikäryhmään 1, 2, 3 ja 4, joiden osuudet väestöstä ovat 0.2, 0.2, 0.3 ja 0.3.

Ihmisen todennäköisyys joutua tiettyntyyppiseen onnettomuuteen aikayksikön (esim. päivän) aikana riippuu ikäryhmästä. Nämä todennäköisyydet ovat 0, $10a$, $5a$ ja $2a$, missä a on jokin luku.

Jos henkilö joutuu kyseiseen onnettomuuteen, millä todennäköisyydellä hän kuuluu mihinkin ikäryhmään?

5. Noppaa heitetään kaksi kertaa. V_1 on ensimmäisen heiton silmäluku ja V_2 toisen heiton silmäluku. Määritellään

$$X = \min(V_1, V_2), \quad Y = \max(V_1, V_2)$$

Perustele, miksi satunnaismuuttujien X ja Y yptnf on

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/36, & \text{kun } 1 \leq x = y \leq 6, \\ 2/36, & \text{kun } 1 \leq x < y \leq 6 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Johda reuna-ptnft f_X ja f_Y yptnf:n reunasummina.

6. Edellisen tehtävän tilanteessa reunajakaumien kertymäfunktio F_X ja F_Y voidaan järkeillä suoraan ilman, että yptnf:a lainkaan johdetaan. Reunapistetodennäköisyysfunktio f_X ja f_Y saadaan laskettua vastaavasta kertymäfunktioista. Johda f_X ja f_Y tällä periaatteella.

Opastus: esitä tapahtumat $\{X > x\}$ ja $\{Y \leq y\}$ heittojen silmälukujen V_1 ja V_2 avulla, ja käytä riippumattomuutta.

7. Noppaa heitetään kaksi kertaa ja silmäluvut ovat V_1 ja V_2 . Kuten edellä, määritellään $X = \min(V_1, V_2)$ ja $Y = \max(V_1, V_2)$. Laske EX ja EY .