Todennäköisyyslaskennan kurssi, 3. harjoitus (22.–26.9.2014)

1. Mitkä seuraavista kertymäfunktioista F_1, F_2, F_3 ja F_4 ovat diskreetin jakauman kertymäfunktioita ja mitkä jatkuvan jakauman kertymäfunktioita? Laske diskreeteille jakaumille niiden pistetodennäköisyysfunktio ja jatkuville jakaumille niiden tiheysfunktio.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 1/6 & \text{kun } 0 \le x < 1/4, \\ 1/2 & \text{kun } 1/4 \le x < 3/4, \\ 1 & \text{kun } x \ge 3/4, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x/2 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases} \qquad F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x^3 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1. \end{cases}$$

2. Olkoon $\alpha > 0$. Määritellään jatkuva jakauma, jonka tf on $f(x) = k \cdot h(x)$, jossa h on

$$h(x) = x^{\alpha - 1}, \quad \text{kun } 0 < x < 1,$$

ja h on nolla muualla.

(a) Laske vakion k arvo, (b) johda jakauman kertymäfunktio, (c) johda jakauman kvantiilifunktio.

3. Olkoon X:llä jatkuva jakauma siten, että sen tiheysfunktio f on aidosti positiivinen välillä (a, b) ja nolla muualla (sallimme arvot $a = -\infty$ sekä $b = \infty$). Monisteessa kaavan (2.9) yläpuolella johdetaan satunnaismuuttujan $F(X)$ kertymäfunktio, kun F on X:n kertymäfunktio.

Johda samaan tapaan satunnaismuuttujan $Y = 1 - F(X)$ kertymäfunktio sekä tunnista Y:n jakauma tuloksen perusteella.

4. Olkoon $X > 0$ jatkuvasti jakautunut sm, jonka tf $f_X(x)$ on jatkuva ja aidosti positiivinen, kun $x > 0$ (ja $f_X(x) = 0$ muuten). Laske satunnaismuuttujien Y ja Z kertymäfunktiot, kun

$$Y = \sqrt{X}, \qquad Z = 1/X.$$

Tarkista, että sekä Y:n että Z:n jakauma on jatkuva (joko sovella lausetta 2.7 tai tarkista lauseen 2.12 oletukset). Laske lopuksi Y:n ja Z:n tiheysfunktiot.

5. Johda edellisessä tehtävässä määriteltyjen satunnaismuuttujien Y ja Z tiheysfunktiot muuttujanvaihtotekniikalla (sovella lausetta 2.12 tai muistisääntöä (2.12)).

6. (Vrt. 1. harjoitusten tehtäviin 5–6.)

Tässä tehtävässä juomalasia ravistetaan useita kertoja. Tapahtumalla H_i (missä $i \ge 0$) tarkoitetaan, että kolikko on kruuna, kun on ravistettu i kertaa; sen komplementti on $T_i = H_i^c$. Aluksi kolikko asetetaan kruuna ylöspäin, siis H_0. Kussakin ravistelussa kolikko kääntyy toisinpäin tn:llä 0.3.

(a) Laske $P(H_i)$, kun $i = 0, 1, 2, 3$.

(b) Tutki, ovatko H_1 ja H_3 riippumattomat. Todista asia täsmällisesti.

(c) Tutki, ovatko H_1 ja H_3 riippumattomat *ehdolla* H_2. Todista asia täsmällisesti, ts. ehdollisen riippumattomuuden määritelmään nojautuen. (Ehdollinen riippumattomuus: Ks. luentojen jakso 1.7.)

7. Laske $P(H_{10})$ kuuden desimaalin tarkkuudella. Vihje: Tarkastele satunnaismuuttujaa, joka ilmaisee montako kertaa kolikko on 10 ravistelun aikana kääntynyt. Mikä on kyseisen satunnaismuuttujan jakauma? Koska kolikko oli aluksi kruuna, se on ravistelujen jälkeen kruuna *jos ja vain jos* kääntymisten lukumäärä on parillinen. Numeeriset laskut voi tehdä vaikka tietokoneella.

(Vapaaehtoinen lisätehtävä: Tutki todennäköisyyttä $P(H_i)$ ravistelujen määrän i funktiona esim. graafisesti.)