Todennäköisyyslaskennan kurssi, 2. harjoitus (15.–19.9.2014)

1. Olkoot A ja B sellaisia tapahtumia, että $0 < P(B) < 1$, ts. sekä B että sen komplementti ovat mahdollisia. Todista seuraavat väitteet täsmällisesti.

(a) Jos $P(A \mid B^c) = P(A \mid B)$, niin myös $P(A) = P(A \mid B)$. (Vihje: Kokonaistodennäköisyyden kaava.) Selitä tulos sanallisesti.

(b) Jos $P(A \mid B) > P(A)$, niin $P(A \mid B^c) < P(A)$. Keksi jokin numeerinen esimerkki, jossa kuvattu tilanne pätee.

B-kohdan voi tulkita sanallisesti näin: Jos tapahtuman B tietäminen *todeksi* lisää A:n todennäköisyyttä (verrattuna tilanteeseen, jossa B:stä ei tiedetä mitään), niin vastaavasti B:n tietäminen *epätodeksi* vähentää sitä.

2. Urheilijalta testataan doping-aineen S käyttöä testillä, jolla on kaksi mahdollista tulosta: tulos voi olla joko positiivinen (jolloin testi antaa todisteita aineen S käytöstä) tai negatiivinen. Tällaisen testin *sensitiivisyys* on määritelmän mukaan tn saada positiivinen testitulos, kun testattava henkilö on käyttänyt ainetta S, ja sen *spesifisyys* on tn saada negatiivinen testitulos, kun testattava henkilö ei ole käyttänyt ainetta S. Aineen käytön *prevalenssi* on todennäköisyys, että populaatiosta satunnaisesti valittu urheilija on käyttänyt ainetta S. Tarkastelemme nyt erinomaisen hyvää testiä, jonka sensitiivisyys on 99 % ja spesifisyys on 98 %. Aineen S käytön prevalenssi on 0.1 %.

Peräkylän urheilukisoissa Matti joutui dopingtestiin ja sai positiivisen testituloksen. Laske todennäköisyys, että Matti on käyttänyt ainetta S. (Tässä tietenkin kysytään ehdollista todennäköisyyttä. Sensitiivisyys ja spesifisyys ovat tiettyjä ehdollisia todennäköisyyksiä.)

3. Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,x^3, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{kun } x \ge 1. \end{cases}$$

a) Laske todennäköisyys $P(X = 0)$.

b) Laske todennäköisyys $P(\frac{1}{2} \le X < \frac{3}{2})$.

4. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka ptnf on $f(x) = k\,h(x)$, jossa k on vakio ja

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = 1 \\ 3, & \text{jos } x = 2 \\ 2, & \text{jos } x = 3 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Laske k:n arvo sekä todennäköisyys $P(X > 1)$.

5. Määritellään funktio f kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{kun } -2 < x < -1, \\ \frac{1}{10}\,\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{kun } -1 < x < \frac{9}{4} \text{ ja } x \neq 0, \\ \frac{3}{10}\,\exp(-x + \frac{9}{4}), & \text{kun } x > \frac{9}{4}, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tarkista, että f on tiheysfunktio (ts. tarkista, että $f \ge 0$ ja että f:n integraali koko reaaliakselin yli on yksi). Hahmottele f:n kuvaaja.

6. Tarkastellaan eräitä kolmea tapahtumaa A, B ja C. Seuraavassa taulukossa niistä on muodostettu komplementilla ja leikkauksella kahdeksan "alkeistapahtumaa" ja niiden todennäköisyyksiä on merkitty $p_1, \ldots, p_8$. (Tapahtuman päälle vedetty viiva, esim. $\overline{A}$ tarkoittaa tässä komplementtia.)

tapahtuma	tn
$A \cap B \cap C$	p_1
$A \cap B \cap \overline{C}$	p_2
$A \cap \overline{B} \cap C$	p_3
$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	p_4
$\overline{A} \cap B \cap C$	p_5
$\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$	p_6
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$	p_7
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	p_8

Jos todennäköisyydet $p_1, \ldots, p_8$ on määrätty, niin niistä voidaan laskea todennäköisyys mille tahansa tapahtumalle, joka saadaan A:sta, B:stä ja C:stä alkeisjoukko-operaatioilla (leikkaus, unioni ja komplementti). Laske $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ ja $P(A \cap B)$. Vihje: Todennäköisyyden additiivisuus.

7. Jatkoa edelliseen tehtävään. Tutki, voidaanko luvut $p_1, \ldots, p_8$ määrätä siten, että pätee

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

mutta silti

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B).$$

Vihje: Tehtävään on ehkä useita ratkaisuja. Koeta asettaa luvut esimerkiksi siten, että $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ ja lisäksi $P(A \cap B \cap C) = 1/8$, mutta $P(A \cap B) \neq 1/4$. Mitä tästä seuraa luvulle p_2? Käytä hyväksesi edellisen tehtävän tuloksia. Huomaa, että lukujen on toteutettava myös ehto $p_1 + \ldots + p_8 = 1$ (miksi?).