

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 1. harjoitus (8.–12.9.2014)

Nämä tehtävät perustuvat opetusmonisteen kappaleisiin 1.1 – 1.8. Lue kappaleet ajatuksen kanssa ja kertaa tarvittaessa myös johdantokurssin (*Johdatus todennäköisyyslaskentaan*) opetusmateriaalista.

1. Tässä tehtävässä tapahtumat A ja B eivät välttämättä ole erillisiä.

Todista a-, b-kohdan kaavat käyttämällä tn-mitan (äärellistä) additiivisuutta, eli kaavaa (1.2). Kyseessä olevien tapahtumien erillisyyden voit tarkistaa joko Vennin diagrammien avulla tai muulla tavalla.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$,

b) $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$.

c) Tarkista, että ns. yhteenlaskukaava $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$ on voimassa.

2. Olkoon $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$ ja $P(A \cap B) = 0.1$. Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet, a) B^c , b) $A \cup B$, c) $A^c \cap B^c$.

3. Noppaa heitetään neljä kertaa. Laske todennäköisyys, että saadaan vähintään yksi kuutonen (Vihje: tapahtuman komplementin todennäköisyys on nyt helppo järkeillä)

4. Emokoiraa synnyttää neljän pennun pentueen. Oletamme, että molempien sukupuolien syntymistodennäköisyydet ovat yhtä suuret ja että eri pentujen sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia.

a) Millä todennäköisyydellä pentueeseen syntyy yhtä monta naarasta kuin urosta?

b) Millä todennäköisyydellä pentueeseen syntyy yksi naaras ja kolme urosta?

Vihje: tehtävän voi ratkaista joko binomikertoimien avulla tai luettelemalla kaikki mahdolliset alkeistapaukset. Alkeistapaukset voidaan esittää merkkijonoilla, jossa esim. UNUU tarkoittaa sitä, että ensimmäisenä syntyy urospentu, toisena naaraspentu, kolmantena urospentu ja neljäntenä urospentu.

5. Tarkastellaan koetta, jossa kolikko aluksi asetetaan juomalasin pohjalle satunnaisessa asennossa (kruuna tai klaava ylöspäin, kummankin tn = 0.5). Juomalasia ravistetaan sitten varovasti, ja katsotaan, onko kolikossa päällimmäisenä kruuna vai klaava. Kirjataan paperille kolikon asento ennen ja jälkeen ravistelun. Kirjaimella H merkitään kruunaa ja kirjaimella T klaavaa. Esim. jono HT tarkoittaa, että kolikko oli aluksi kruuna, ja ravistelun jälkeen klaava.

Kokemusperäisesti on (tällä kolikolla, tällä juomalasilla ja tällä ravistelevalla henkilöllä) havaittu, että kolikko kääntyy ravistelussa toisinpäin todennäköisyydellä 0.3.

Mahdollisia tuloksia on neljä (HH , HT , TH ja TT). Laske niiden todennäköisyydet ketjusäännöllä. Tarkista, että niiden summa on yksi.

6. Jatkoa edelliseen tehtävään.

(a) Ovatko tapahtumat “kruuna ennen ravistelua” ja “kruuna jälkeen ravistelun” riippumattomat? Todista täsmällisesti esim. määritelmään 1.4 nojautuen.

(b) Mikä on todennäköisyys, että kolikko on ravistelun jälkeen kruuna?

(c) Jos kolikko on ravistelun jälkeen kruuna, mikä on todennäköisyys, että se oli kruuna jo ennen ravistelua?