

1.1 Todennäköisyyden tulkintoja

Mitä on **todennäköisyys**?

Formaali (aksiomaattinen) vastaus: Todennäköisyys on

- **luku**, joka on välillä $[0, 1]$, joka
- **liittyy** tiettyyn “tapahtumaan”, ts. jotakin tiettyä tosiasiaa koskevaan kyllä-ei-kysymykseen (“onko asia näin vai noin”),
- ja joka noudattaa tiettyjä matemaattisia **laskentasääntöjä**.

Formaalisti ajatellen siinä kaikki! Vrt. kvanttimekaniikassa “shut up and calculate”.

Todennäköisyyden tulkintoja

“Todennäköisyys on välillä $[0, 1]$ oleva luku, joka liittyy johonkin tapahtumaan.”

Käytännössä herää kysymys: Mitä kyseinen luku **sanoo** kyseisestä tapahtumasta.

Erilaisia vastauksia kutsutaan varsin raflaavasti todennäköisyyden eri **tulkinnoiksi**, ikään kuin ne olisivat jyrkästi ristiriidassa.

Tosiasiassa ne ovat eri näkökulmia samaan asiaan, yhteensopivia ja toisiaan täydentäviä.

Pari erilaista tapahtumaa ja tulkintoja

- K1: *Millä todennäköisyydellä saat kuutosen nopanheitossa?*
- K2: *Millä todennäköisyydellä seuraava Kätilöopistolla syntyvä lapsi on tyttö?*
- K3: *Millä todennäköisyydellä RKP saa kevään 2015 eduskuntavaalissa ainakin 10 paikkaa?*

Mitkä seuraavista todennäköisyyden tulkinnoista sopivat kysymyksiin K1–K3?

- Klassinen eli symmetrinen todennäköisyys.
- Todennäköisyyden frekvenssitulkinta.
- Subjekttiivinen todennäköisyys.

Katsotaan ensin mitä nämä kolme “tulkintaa” ovat ...

Klassinen eli symmetrinen todennäköisyys

- **Perusjoukko** eli kaikkien mahdollisten alkeistapausten joukko Ω on nyt äärellinen.
- Kutakin alkeistapausta pidetään yhtä todennäköisenä.
- Tapauksen A todennäköisyydeksi valitaan A :lle suotuisten alkeistapausten lukumäärä jaettuna kaikkien mahdollisten tapausten lukumäärällä, eli

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{A:n \text{ alkioden lkm}}{\Omega:n \text{ alkioden lkm}}$$

- Käytetään esim. uhkapelien yhteydessä (nopanheitto, lantinheitto, korttipelit, lotto).

Todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Mahdollinen kokeissa, joita voidaan toistaa mielin määrin riippumattomasti samoissa olosuhteissa.
- Riippumattomuus tarkoittaa sitä, että edelliset koetulokset eivät vaikuta seuraavien kokeiden tuloksiin.
- Tapahtuman A todennäköisyys yritetään määritellä kaavalla

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}, \quad (1)$$

jossa $N(A)$ on niiden kokeiden frekvenssi (eli lukumäärä), joissa saatiin lopputulos A , ja N on riippumattomien toistojen lukumäärä.

- Suure $N(A)/N$ on tapahtuman A **suhteellinen frekvenssi**.

Lisää frekvenssitulkinnasta

- Todennäköisyyttä ei oikeasti voida *määritellä* suhteellisten frekvenssien raja-arvoina.
- On kuitenkin hyvin valaisevaa yrittää selittää todennäköisyyslaskennan käsitteitä frekvenssitulkinnan avulla.
- Todennäköisyyslaskennan käsitteitä voidaan havainnollistaa tietokonesimuloinneilla. Tällöin sovelletaan frekvenssitulkintaa.
- Esim. eräessä tietokonesimulaatiossa saatiin “nopanheitossa” kuutosen suhteelliseksi frekvensseiksi 18/100, 1638/10000, 166971/1000000. Mitä tästä pystytään päättelemään?
- Vrt. todellisen fyysisen nopanheiton toistokoe. Weldon 1894: 26306×12 heittoa käsin. Labby 2009: Nopanheittokone.

Todennäköisyyden subjektiivinen eli henkilökohtainen tulkinta

- Ainoa tapa soveltaa todennäköisyysslaskentaa ainutkertaisten tapahtumien yhteydessä.
- Todennäköisyys kuvaa henkilön (tai muun tahon) uskomuksen astetta väitteen totuuteen hänen käytettävissä olevan tiedon pohjalta.
- Eri tahot voivat tällöin saada erilaisia numeerisia vastauksia saman tapahtuman todennäköisyydelle.
- Saman henkilön todennäköisyydet tietylle tapahtumalle voivat olla eri aikoina erilaisia, jos henkilön käytössä oleva informaatio muuttuu.

Kysytään uudestaan

- K1: *Millä todennäköisyydellä saat kuutosen nopanheitossa?*
- K2: *Millä todennäköisyydellä seuraava Kätilöopistolla syntyvä lapsi on tyttö?*
- K3: *Millä todennäköisyydellä RKP saa kevään 2015 eduskuntavaalissa ainakin 10 paikkaa?*

Mitkä seuraavista todennäköisyyden tulkinnoista sopivat kysymyksiin K1–K3?

- Klassinen eli symmetrinen todennäköisyys.
- Todennäköisyyden frekvenssitulkinta.
- Subjekttiivinen todennäköisyys.

1.2 Joukko-oppia

- Joukko-oppi on todennäköisyyslaskennan perustyökalu.
- Joukko-opin kaavoja kannattaa havainnollistaa Vennin diagrammien avulla, jos tämä on mahdollista.
- Joukko-opin operaatiot vastaavat läheisesti logiikan konnektiiveja (“ja”, “tai”, “ei”).
- Joukko-opin operaatioita tulkitaan tn-laskennassa usein sanallisesti, ks. taulukko 1.1 (opetusmoniste s. 4).

Perusjoukko, alkeistapaus ja tapahtuma

- Ω on **perusjoukko** eli tarkasteltavan satunnaiskokeen kaikkien mahdollisten lopputulosten joukko.
- Perusjoukon alkioita $\omega \in \Omega$ kutsutaan **alkeistapauksiksi** (engl. *elementary event*).
- Perusjoukon osajoukkoja $A \subset \Omega$ kutsutaan **tapahtumiksi** (engl. *event*).
- Kun mallinnetaan reaalimaailman satunnaisilmiötä, perusjoukko voidaan valita muuten vapaasti, mutta sen pitää olla riittävän rikas, jotta kaikki kiinnostuksen kohteena olevat tapahtumat voidaan esittää sen osajoukkoina.
- Tietty sovellus voidaan käsitellä käyttämällä useita erilaisia valintoja.

1.3 Matemaattinen todennäköisyyden käsite

Tapahtumat A_1, A_2, \dots ovat **erillisiä** (engl. *disjoint*) eli **toisensa poissulkevia** (engl. *mutually exclusive*), mikäli

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{kun} \quad i \neq j.$$

Todennäköisyys(mitta) (engl. *probability measure*) P liittää perusjoukon Ω tapahtumaan $A \subset \Omega$ reaaliluvun $P(A)$, jota kutsutaan A :n todennäköisyydeksi. P toteuttaa aksioomat.

- (1) $P(A) \geq 0$ kaikille tapahtumille $A \subset \Omega$,
- (2) $P(\emptyset) = 0$ ja $P(\Omega) = 1$,
- (3) (**täysadditiivisuus**) $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, kun A_1, A_2, \dots ovat erillisiä tapahtumia.

Äärellinen additiivisuus

- Jos A ja B ovat erillisiä tapahtumia niin täysadditiivisuuden aksioomasta seuraa n -mitan **(äärellinen) additiivisuus** eli

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{kun} \quad A \cap B = \emptyset. \quad (2)$$

- Jos A_1, \dots, A_n ovat erillisiä tapahtumia, niin

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

Tämän voi johtaa paitsi täysadditiivisuuden aksioomasta myös induktiolla ominaisuudesta (2).

- **Täysadditiivisuutta** ei ole mahdollista johtaa induktiolla äärellisestä additiivisuudesta.

Ääreellinen additiivisuus on helposti ymmärrettävä ominaisuus, täysadditiivisuus ei

- Sen seikan, että todennäköisyyden pitää olla äärellisesti additiivinen voi perustella todennäköisyyden frekvenssitulkinnan avulla.
- Täysadditiivisuus ei ole intuitiivisesti helposti ymmärrettävä ominaisuus.
- Täysadditiivisuus vaaditaan todennäköisyydeltä matemaattisen mukavuudenhalun takia: tällä tavalla saadaan matemaattisesti kaunis, voimakas ja yksinkertainen teoria.

Lause 1.1: todennäköisyyden ominaisuuksia

- a) (Äärellinen additiivisuus) Jos $A \cap B = \emptyset$, niin $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- b) $P(A^c) = 1 - P(A)$ kaikille A .
- c) $0 \leq P(A) \leq 1$ kaikille A .
- d) (Tn-mitan monotonisuus) Jos $A \subset B$, niin $P(A) \leq P(B)$.
- e) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ kaikille A ja B .
- f) (Yhteenlaskukaava) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ kaikille A ja B .
- g) (Boolean epäyhtälö) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ kaikille A ja B .
- h) (Bonferronin epäyhtälö) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ kaikille A ja B .

1.4 Kombinatoriikkaa

- Klassisessa todennäköisyyden tulkinnassa (eli tasaisessa todennäköisyysmallissa)

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}. \quad (3)$$

- Alkeistapaukset $\omega \in \Omega$ ovat tällöin symmetrisiä sikäli, että niillä on kaikilla sama todennäköisyys, eli

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega}, \quad \text{kaikilla } \omega \in \Omega.$$

- Jotta osaisimme laskea todennäköisyyksiä, meidän pitää osata laskea erinäisiä kombinatorisia laskuja.

Kuinka monella eri tavalla voidaan poimia k alkioita n -alkoisesta joukosta?

Saamme erilaisia vastauksia sen mukaan, valitaanko alkiot

- **takaisinpanolla** (eli palauttaen, engl. *with replacement*), jolloin sama alkio voidaan valita useaan kertaan, ja k voi olla suurempi kuin n ;
- **ilman takaisinpanoa** (eli takaisinpanotta eli palauttamatta, engl. *without replacement*), jolloin valitaan $k \leq n$ eri alkioita.

Lisäksi pitää kertoa, onko poimintajärjestyksellä väliä vai ei.

- Jos **poimintajärjestyksellä on väliä**, niin valinta esitetään (järjestettynä) jonona.
- Jos **poimintajärjestyksellä ei ole väliä**, niin sellaiset kaksi valintaa ovat ekvivalentteja, joissa on poimittu samat alkiot.

Kombinatoriikan tuloperiaate

Tarkastellaan tehtävää, joka voidaan jakaa k :hon osatehtävään, joilla on seuraavat ominaisuudet.

- Ensimmäinen osatehtävä voidaan suorittaa n_1 :llä eri tavalla.
- Kun ensimmäinen osatehtävä on suoritettu, toinen osatehtävä voidaan suorittaa n_2 :lla eri tavalla (riippumatta siitä, mikä valinta tehtiin ensimmäisessä vaiheessa) jne.
- Kun $k - 1$ ensimmäistä osatehtävää on suoritettu, k :s osatehtävä voidaan suorittaa n_k eri tavalla (riippumatta siitä, mitkä valinnat tehtiin aikaisemmissa vaiheissa).
- Koko tehtävän ratkaisu saadaan koottua yksikäsitteisellä tavalla osatehtävien $1, 2, \dots, k$ ratkaisuista.

Tällöin koko tehtävä voidaan suorittaa $n_1 n_2 \cdots n_k$ eri tavalla.

Poiminta takaisinpanolla, kun poimintajärjestyksellä on väliä

- n -alkioisesta joukosta voidaan muodostaa

$$n^k$$

erilaista k -alkioista jonoa (x_1, \dots, x_k) takaisinpanolla.

- Perustelu: ensimmäinen alkio x_1 voidaan valita n eri tavalla; sen jälkeen toinen alkio x_2 voidaan valita n eri tavalla jne.

Poiminta ilman takaisinpanoa, kun poimintajärjestyksellä on väliä

- n -alkioisesta joukosta voidaan muodostaa

$$n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

erilaista k -jonoa ($k \leq n$), kun kaikkien jonon alkioden pitää olla erisuuria.

- Tällaisia jonoja kutsutaan ko. joukon **k -permutaatioiksi** (tai **k -variaatioiksi**).
- Perustelu: Ensimmäinen jonon alkio voidaan valita n erilaisella tavalla. Tämän jälkeen toinen alkio voidaan valita $(n-1)$:llä eri tavalla, sillä toisen alkion pitää olla eri suuri kuin ensimmäisen. Näin tehdään k valintaa, joissa aina edelliset valinnat on suljettu pois.

- Näin n -kertoma $n!$ määritellään kokonaisluvulle $n \geq 0$:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1, \quad \text{kun } n \geq 1, \text{ ja } 0! = 1. \quad (4)$$

- Kertoma $n!$ ilmaisee n -alkoisen joukon n -permutaatioiden, eli lyhyesti permutaatioiden lukumäärän: n alkiota voidaan järjestää $n!$ erilaisella tavalla.
- Kertoman avulla kirjoitettuna n -alkioisen joukon k -permutaatioita on

$$\frac{n!}{(n - k)!} = n(n - 1) \cdots (n - k + 1).$$

Poiminta ilman takaisinpanoa, kun poimintajärjestyksellä ei ole väliä

- Kun nyt n -alkioisesta joukosta valitaan k alkiota ilman takaisinpanoa, niin tämä on sama asia kuin että valitaan kyseisen joukon k -alkioinen osajoukko.
- Näitä k -osajoukkoja kutsutaan myös ko. joukon *k -kombinaatioiksi*.
- Niiden lukumäärän ilmaisee **binomikerroin** n yli k :n,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{kun } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases} \quad (5)$$

- Perustelu: kukin tällainen osajoukko voidaan järjestää $k!$ eri tavalla k -jonoksi, jolloin saadaan generoitua kertaalleen kaikki ko. joukon k -permutaatiot.

- Binomikaavan mukaan

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad (6)$$

kun a ja b ovat reaalilukuja ja $n \geq 0$ on kokonaisluku.

- Binomikaava seuraa binomikertoimien kombinatorisesta luonnehdinnasta sekä reaalilukujen laskutoimitusten ominaisuuksista.

1.5 Multinomikertoimet

- Uusi tulkinta: $\binom{n}{k}$ kertoo kuinka monella tavalla n -alkioinen joukko voidaan osittaa **kahteen** osajoukkoon siten, että ensimmäiseen osaan tulee k alkioita ja toiseen osaan $n - k$ alkioita.
- Kuinka monta vaihtoehtoa on, jos n -alkioinen joukko ositetaan **kolmeen** osajoukkoon siten, että ensimmäiseen osaan tulee k_1 alkioita, toiseen osaan k_2 alkioita ja kolmanteen osaan k_3 alkioita?
- Jotta kysymys olisi mielekäs, oletetaan että kukin $0 \leq k_i \leq n$, ja että

$$k_1 + k_2 + k_3 = n.$$

Ensimmäiseen osaan k_1 alkioita, toiseen osaan k_2 alkioita ja kolmanteen osaan k_3 alkioita:

- Voimme valita ensimmäisen osajoukon alkut $\binom{n}{k_1}$ tavalla;
- sen jälkeen toisen osan alkut $\binom{n-k_1}{k_2}$ tavalla;
- kaikki jäljelle jääneet alkut kuuluvat kolmanteen osaan.

Eri mahdollisuuksia on tuloperiaatteen nojalla yhteensä

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

- Merkintä:

$$\binom{n}{k_1 k_2 k_3} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!}.$$

Toisinaan alakerrassa olevat luvut erotetaan toisistaan selvyden vuoksi pilkuilla, ja toisinaan taas pilkkuja ei käytetä.

- Tälle luvulle käytetään nimitystä **trinomikerroin** (tai yleisemmin, **multinomikerroin**).

Yleistys m osalle

- Olkoon annettuna luvut k_1, \dots, k_m siten, että kukin $0 \leq k_i \leq n$, ja

$$k_1 + \dots + k_m = n.$$

- Miten monella eri tavalla n -alkioinen joukko voidaan osittaa m osaan A_1, \dots, A_m siten, että kussakin osassa A_i on k_i alkioita?
- Vastaavasti kuin aikasemmin nähdään, että eri mahdollisuuksia on

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \quad (7)$$

kappaletta. Näitä lukuja kutsutaan multinomikertoimiksi.

KÄNKKÄRÄNKKÄ

- Kuinka monta erilaista 12-kirjaimista sanaa voidaan muodostaa sanan KÄNKKÄRÄNKKÄ kirjaimista? Kukin kirjain pitää käyttää kertaalleen.
- Vastaus: 83160
- Miten vastaukseen päädytään?

Huomautuksia multinomikertoimista

- Binomikerroin on multinomikertoimen erikoistapaus, sillä

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k, n-k}.$$

- Multinomikertoimet esiintyvät ns. **multinomikaavassa**, jonka mukaan

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}. \quad (8)$$

Tässä kaavassa summataan yli kaikkien sellaisten ei-negatiivisten kokonaislukujen k_1, k_2, \dots, k_m , joiden summa on n .

- Binomikaava (6) on multinomikaavan erikoistapaus.

1.6 Ehdollinen todennäköisyys

- Toisinaan saamme tapahtuneesta osittaista informaatiota, ja tämä informaatio voidaan esittää siinä muodossa, että tapahtuma B on sattunut, jossa $P(B) > 0$.
- Kun tämä tieto otetaan huomioon, niin jonkin muun tapahtuman A todennäköisyytenä ei enää pidetä sen alkuperäistä todennäköisyyttä $P(A)$ vaan sen sijaan lasketaan **tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B** , joka määritellään kaavalla

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{jossa } P(B) > 0. \quad (9)$$

- $P(A | B)$ on tapahtuman A todennäköisyys, kun otetaan huomioon (täsmälleen se) että B on sattunut.

Ehdollisen todennäköisyyden merkinnästä

Merkinnässä

$$P(A | B) \quad (10)$$

on pystyviivan eri puolilla kaksi tapahtumaa:

- A , jonka todennäköisyydestä on kysymys, ja
- B , joka oletetaan tai tiedetään todeksi, ns. **ehtotapahtuma**.

Miten päin ne ovat? Muistisääntö: kyseessä on A -tapahtumien “osuus” B -tapahtumista, ikään kuin jakolasku “ A/B ”.

Jakolasku näkyy määrittelevässä kaavassa

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (11)$$

(huom. B osoittajassa).

Esimerkki, kun alkuperäinen tn on symmetrinen

- **Kysymys:** Heitetään kerran noppaa, ja silmäluku on parillinen. Millä todennäköisyydellä silmäluku on a) yksi b) kaksi?
- **Vastaus:** a) 0 b) $1/3$.
- Miten vastaukseen päädytään?

- Ehdollisen todennäköisyyden $P(A | B)$ kaavassa

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

uudeksi perusjoukoksi otetaan B , jonka ehdolliseksi todennäköisyydeksi $P(B | B)$ pitää saada yksi.

- Tämä saadaan aikaan normittamalla alkuperäinen todennäköisyys: se jaetaan ehdon B todennäköisyydellä.
- Koska B on sattunut, niin kaavassa lasketaan ei-ehdollisia todennäköisyyksiä vain joukon B osajoukoille $A \cap B$. (Tiedetään, että ei toteudu mikään B :n ulkopuolinen alkeistapaus.)

Ehdollisen todennäköisyyden $P(A | B)$ frekvenssitulkinta

- Tarkastellaan N -kertaista toistokoetta, jossa voi sattua A tai B tai molemmat.
- Tapahtuman A suhteellinen esiintymisfrekvenssi **niissä kokeissa**, joissa on sattunut tapahtuma B on

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)/N}{N(B)/N}.$$

- Frekvenssitulkinnan mukaan jälkimmäisessä muodossa osoittaja lähestyy todennäköisyyttä $P(A \cap B)$ ja nimittäjä todennäköisyyttä $P(B)$, kun N kasvaa rajatta.
- Siis ehdollisen todennäköisyyden $P(A | B)$ määritelmä osamääränä $P(A \cap B)/P(B)$ on järkeenkäypä.

Esimerkki: Frekvenssitulkinta ja hylkäysotanta

- Heitetään toistuvasti noppaa. Olkoon $B =$ “tulos on parillinen” ja $A =$ “tulos on kakkonen”.
- **Hylätään** tulosjonosta ne nopanheittokerrat, joissa B ei toteudu.
- Syntyy jono parillisia nopanheittotuloksia (joissa aina toteutuu B). Niissä on pitkän päälle yhtä paljon kakkosia, nelosia ja kuutosia, siis kutakin $1/3$.

Kokeilu: Heitettiin noppaa miljoona kertaa.

- Tuloksista parillisia oli 500353 kpl. Niistä kakkosia oli 166397 kpl, eli suhteellinen osuus $166397/500353 \approx 0.3326 \approx 1/3 = P(A | B)$.
- Alkuperäisestä nopanheittojonosta kakkosten osuus oli $166397/1000000 \approx 0.1664 \approx 1/6 = P(A)$.

Esimerkki: Poiminta väestöstä

- Erästä väestöstä 40 % on miespuolisia (B). Värisokeita (A) on miespuolisista 10 %, mutta naispuolisista vain 1 %. Poimitaan väestöstä umpimähkään henkilö.
- $P(A | B) = 0.1$, eli jos poimittu henkilö sattuu olemaan miespuolinen, niin hän on värisokea todennäköisyydellä 0.1.
- $P(A | B^c) = 0.01$, eli jos poimittu henkilö sattuu olemaan naispuolinen, niin hän on värisokea todennäköisyydellä 0.01.
- Huomaa, ettei näitä kahta voi päätellä toisistaan komplementtisäännöllä (0.1 ei ole $1 - 0.01$).

- “Alkuperäiset” eli ei-ehdolliset todennäköisyydet $P(A)$ voidaan ymmärtää ehdollisina todennäköisyyksinä ehdolla Ω ,

$$P(A | \Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1}.$$

- On mahdollista tarkistaa, että ehdollinen todennäköisyys $P(A | B)$ on argumentin A funktiona todennäköisyys, eli että se toteuttaa todennäköisyyden kolme aksiomaa, mistä seuraa että
- ehdolliselle todennäköisyydelle saadaan käyttää samoja laskusääntöjä (pystyviivan vasemmalla puolella esiintyvän argumentin suhteen), kuin tavalliselle todennäköisyydelle.

A ja B voivat olla mitä tahansa tapahtumia

Merkinnässä $P(A | B)$ voi kumpi tahansa tapahtumista olla esim. leikkaus-, unioni- tai komplementtitapahtuma. Esim.

- $P(A | B^c)$ on A :n tn, jos B^c tapahtui, ts. B ei tapahtunut.
- $P(A^c | B)$ on A^c :n tn, jos B tapahtui.

Ylläolevat ovat yleensä aivan eri todennäköisyydet!

- $P(A | (B \cap C))$ on A :n todennäköisyys, kun tapahtui $(B \cap C)$, toisin sanoen sekä B että C .
- Esim. todennäköisyys, että väestöstä poimittu henkilö on värisokea (A), jos hän on miespuolinen (B) ja hänen äitinsä on värisokea (C)
- Sovelletaan edelleen aivan samoja kaavoja.

$$P(A | (B \cap C)) = \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(B \cap C)}. \quad (12)$$

Kertolaskusääntö eli ketjusääntö

- Ehdollisen todennäköisyyden määritelmä voidaan kirjoittaa myös tulomuodossa,

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B). \quad (13)$$

- Tämä kaava on nimeltään todennäköisyyksien **kertolaskusääntö** eli **kertolaskukaava**. Siitä käytetään myös nimeä todennäköisyysslaskennan **ketjusääntö**.
- Mikäli $P(A) > 0$ ja $P(B) > 0$, on

$$P(A \cap B) = P(B) P(A | B) = P(A) P(B | A),$$

josta saadaan ratkaistua toinen ehdollisista todennäköisyyksistä, nimittäin

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) P(B)}{P(A)}.$$

Kertolaskusääntö useammalle tapahtumalle

- Tarkastellaan kolmea tapahtumaa A , B ja C , ja oletetaan, että $P(A \cap B) > 0$. Tällöin myös $P(A) > 0$, ja

$$\begin{aligned} P(A) P(B | A) P(C | A \cap B) &= P(A) \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} \\ &= P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

- Jos tapahtumia on n kappaletta A_1, \dots, A_n ja $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, niin niiden leikkauksen todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \quad (14) \\ &\quad \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

Esimerkki

- Perusteellisesti sekoitetusta 52 kortin pakasta jaetaan kaksi korttia. Laske todennäköisyydet $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_2)$ ja $P(A_2 | A_1)$, kun

$$A_1 = \{ \text{"1. kortti on ässä"} \}, \quad A_2 = \{ \text{"2. kortti on ässä"} \}.$$

- Vastaus:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13},$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52} \frac{3}{51}, \quad P(A_2 | A_1) = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 51} = \frac{1}{17}.$$

- Kaksi erityyppistä ratkaisua: kombinatorinen ratkaisu, ja kertolaskusääntöä hyödyntävä ratkaisu.
- Kombinatorisessa ratkaisussa pitää huolellisesti kertoa, mitä pidetään perusjoukkona. Kertolaskusääntöä käytettäessä ajatellaan suoraan (ehdollisia) todennäköisyyksiä

1.7 Tapahtumien riippumattomuus

Määritelmä (Kahden tapahtuman riippumattomuus)

Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Tämä asia voidaan merkitä $A \perp B$.

Tarkista, että ymmärrät, mitä eroa on seuraavilla käsitteillä.

- a) A ja B ovat erillisiä tapahtumia,
- b) A ja B ovat riippumattomia tapahtumia.

Riippumattomuus ja ehdollinen todennäköisyys

- Jos $P(B) > 0$ ja $A \perp B$, niin

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

- Tulkinta: mikäli A ja B ovat riippumattomia, niin tieto B :n sattumisesta ei muuta A :n todennäköisyyttä.
- Toisaalta, jos $P(B) > 0$ ja $P(A | B) = P(A)$, niin $A \perp B$, sillä tällöin

$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B) = P(A)P(B).$$

- Yhteenveto: jos $P(B) > 0$, on

$$A \perp B \iff P(A | B) = P(A). \quad (15)$$

Esimerkki: kahden nopan heitto

- Perusjoukko on $\Omega = E \times E$, jossa $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sen alkeistapaukset ovat symmetrisiä, ja ensimmäinen koordinaatti kertoo ensimmäisen nopan silmäluvun ja toinen koordinaatti toisen nopan silmäluvun.
- Olkoot $1 \leq i, j \leq 6$, ja tarkastellaan tapahtumia

$$A = \{\text{"nopan yksi tulos on } i\}, \quad B = \{\text{"nopan kaksi tulos on } j\}$$

- Tällöin

$$P(A) = \frac{6}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36},$$

ja

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \frac{1}{6} = P(A)P(B),$$

joten $A \perp B$.

Useamman tapahtuman riippumattomuus

Määritelmä

Tapahtumat A_1, \dots, A_n ovat riippumattomia, eli $A_1, \dots, A_n \perp\!\!\!\perp$, jos kaikilla $k \geq 2$ on voimassa

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

aina kun $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ ovat keskenään erisuuria kokonaislukuja.

Esim. tapahtumat A , B ja C ovat riippumattomia, jos kaikki seuraavat neljä ehtoa pätevät,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Ehdollinen riippumattomuus

Määritelmä (Ehdollinen riippumattomuus)

Olkoon C tapahtuma, jolle $P(C) > 0$. Tapahtumat A ja B ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla C , jos

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) P(B \mid C).$$

Tämä voidaan merkitä $(A \perp\!\!\!\perp B) \mid C$.

Ts. kaksi tapahtumaa ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla C , jos ne ovat riippumattomia ehdollisen todennäköisyyden $P(\cdot \mid C)$ mielessä. Ehdollisen riippumattomuuden käsite voidaan tietenkin yleistää useammalle kuin kahdelle tapahtumalle.

1.8 Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Määritelmä (Perusjoukon ositus)

Tapahtumat B_1, \dots, B_n muodostavat perusjoukon Ω osituksen, jos

- ne ovat erillisiä: $B_i \cap B_j = \emptyset$, kun $i \neq j$
- ne peittävät (eli tyhjentävät) Ω :n, eli $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$.

Kokonaistodennäköisyyden kaava

- Olkoon A tapahtuma ja B_1, \dots, B_n perusjoukon Ω ositus.
- Ositetaan A leikkamalla se kullakin joukoista B_i :

$$A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n).$$

- Tässä osat $(A \cap B_1), \dots, (A \cap B_n)$ ovat erillisiä, joten (additiivisuus ja kertolaskusääntö)

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A | B_i). \quad (16)$$

Tämä on kokonaistodennäköisyyden kaava.

Esimerkki: Poiminta väestöstä (jatkuu)

Erästä väestöstä 40 % on miespuolisia (B). Värisokeita (A) on miespuolisista 10 %, mutta naispuolisista vain 1 %. Poimitaan väestöstä umpimähkään henkilö.

- Ketjusääntö: värisokeita miehiä on koko väestöstä osuus $P(A \cap B) = P(A | B) P(B) = 0.1 \cdot 0.4 = 0.04$.
- Ketjusääntö: värisokeita naisia on koko väestöstä osuus $P(A \cap B^c) = P(A | B^c) P(B^c) = 0.01 \cdot 0.6 = 0.006$.
- Kokonaistodennäköisyys: värisokeita yhteensä on väestöstä osuus $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = 0.04 + 0.006 = 0.046$.

Bayesin kaava

- Olkoon A tapahtuma siten, että $P(A) > 0$, ja olkoon B_1, \dots, B_n perusjoukon Ω ositus.
- Jos tapahtuma A on sattunut, niin tapahtuman B_i (ehdollinen) tn on

$$P(B_i | A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) P(A | B_i)}{P(A)}$$

- Kun tässä $P(A)$ vielä esitetään kokonaistodennäköisyyden kaavalla (16), saadaan **Bayesin kaava**

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A | B_j)}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (17)$$

1.9 Monotoninen jatkuvuus

Lause (Todennäköisyyden monotoninen jatkuvuus)

Olkoon B_1, B_2, \dots jono tapahtumia.

(a) Jos jono on kasvava, eli $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$, niin

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

(b) Jos jono on laskeva, eli $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$, niin

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

Todistuksessa tarvitaan täysadditiivisuutta.