Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
4. harjoitus (24. 11. 2014)

1. Jatkoa harjoituksen 3 tehtäviin 2 ja 3 (autoregressiivinen aikasarja). Johda suurimman uskottavuuden estimaattorin $\hat{\phi}$ lauseke. Järkeile ilman tarkkaa todistusta, että $\hat{\phi}$ ei yleensä ole harhaton, so. ei päde $\mathsf{E}(\hat{\phi}) = \phi$. Vertaa tilannetta tavalliseen regressiomalliin $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ ja sen parametrin β estimointiin.

   Opetus. Yleisemmin muistiinpanojen sivujen 21–22 lineaarisessa mallissa estimaattori $\hat{\beta}$ (ks. yhtälö (2.18)) ei ole välttämättä harhaton, mikäli selittävien muuttujien vektorissa Z_i on mukana vastemuuttujan aikaisempia arvoja.

2. Harjoituksen 3 tehtävässä 3 laskettiin autoregressiivisen aikasarjamallin pistemääräfunktio $s_n(\phi, \sigma^2; \boldsymbol{Y}_n)$. Osoita suoralla laskulla, että se on martingaali informaatiojoukon $\boldsymbol{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ suhteen.

   Muista. Satunnaisvektori(jono) on martingaali jos ja vain jos sen jokainen komponentti on.

3. Olkoot X ja Z jatkuvasti jakautuneita k-ulotteisia satunnaisvektoreita siten, että $X \perp\!\!\!\perp Z$. Osoita, että satunnaisvektorin $Y = X + Z$ ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$ on sama kuin satunnaisvektorin $x + Z$ jakauma eli symbolisesti

   $$Y \mid (X = x) \stackrel{d}{=} x + Z.$$

   Jos esimerkiksi $Z \sim \mathsf{N}_k(\mu, \Sigma)$, niin $Y \mid (X = x) \sim \mathsf{N}_k(x + \mu, \Sigma)$.

   Tätä (kenties intuitiivisesti selvää) tulosta käytettiin mm. sivulla 18 autoregressiivisen mallin yhteydessä ja sivulla 22 pääteltäessä yhtälöstä (2.16) tulos (2.15).

4. Tarkastellaan vielä luennoilla ja monisteessa mainittua autoregressiivista mallia, johon on lisätty vakiotermi ja ”ulkopuolinen” satunnainen selittäjä:

   $$Y_i = \alpha + \phi Y_{i-1} + \gamma X_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

   Oletetaan, että satunnaisvektorin $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ jakauma riippuu jostakin parametrista λ ja $\boldsymbol{X} \perp\!\!\!\perp (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, jossa tavalliseen tapaan $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$. Lisäksi $Y_0 = y_0$ on tunnettu vakio. Kiinnostava parametri on $\psi = (\alpha, \phi, \gamma, \sigma^2)$.

   Sijoitetaan tämä malli monisteen sivuilla 20–22 kuvatun ehdollisen mallin ja marginaalimallin viitekehykseen. Perustele, että

   a) marginaalimalli on $\boldsymbol{X}$:n yhteisjakauma, joka riippuu vain parametrista λ, ja

   b) ehdollinen malli voidaan tulkita seuraavien toisistaan riippumattomien muuttujien yhteisjakaumana:

   $$Y_i \mid (Y_{i-1} = y_{i-1}, X_i = x_i) \stackrel{d}{=} \alpha + \phi y_{i-1} + \gamma x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

   joka riippuu vain parametrista ψ.

   c) Mikä on ehdollinen uskottavuusfunktio $L^{(c)}(\psi; \boldsymbol{w})$? Tässä $\boldsymbol{w}$ koostuu kaikista havainnoista y_i ja x_i kuten monisteessa.

Huom: Harjoitukset ovat salissa CK111 (K-kerros) ja alkavat tasan 10.00.

Vihjeitä kääntöpuolella!

Vihjeitä:

3. Parin (X, Z) ytf on helppo. Johda muunnoskaavan avulla parin (X, Y) ytf. Voit halutessasi olettaa, että $k = 1$.

4. Ideoita: X_i:n ehdollistaminen $\boldsymbol{W}_{i-1}$:n suhteen merkitsee samaa kuin sen ehdollistaminen vektorin $(X_1, \ldots, X_{i-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1})$ suhteen ja edelleen vektorin $(X_1, \ldots, X_{i-1})$ suhteen. Käytä tuloesitystä $\boldsymbol{X}$:n jakaumalle. Uskottavat perustelut riittävät; ei tarvitse todistaa kaikkea ehdollisen jakauman määritelmästä lähtien.