Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015
Harjoitus 12 (17. ja 19. 2. 2015)

1. Valetilastotieteilijä V testaa malliin $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\theta)$ liittyviä hypoteeseja $H_0\colon \theta = \theta_0$ ja $H_1 : \theta \neq \theta_0$ merkitsevyystasolla 0.01. Mikäli H_0 ei tule hylätyksi aineiston $\boldsymbol{y}$ perusteella, hän kerää uuden riippumattoman aineiston ja tekee testin uudelleen. Hän jatkaa aineistojen keruuta niin kauan, kunnes H_0 tulee hylätyksi.

   a) Olkoon N niiden aineistojen lukumäärä, jotka V joutuu keräämään. Mitä jakaumaa N noudattaa? Mikä on sen odotusarvo?

   b) Mikä on V:n käyttämän ”testausmenettelyn” todellinen merkitsevyystaso, ts. millä todennäköisyydellä tosi H_0 tulee lopulta hylätyksi?

   c) Mihin kurssilla käsiteltyyn aiheeseen tämä tehtävä mahtaa liittyä?

2. (Monisteen teht. 5.11.) Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumaton otos eksponenttiperheen jakaumasta, jonka ptf/tf on muotoa
$$f(y;\theta) = c(\theta)h(y)e^{\phi(\theta)t(y)},$$
jossa $c(\theta)$ ja $h(y)$ ovat ei-negatiivisia funktioita ja $\phi(\theta)$ on aidosti kasvava funktio reaalisesta parametrista θ (vrt. monisteen kohta 4.2.5 ja teht. 2.20). Näytä, että syntyvällä mallilla $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\theta)$ on monotoninen uskottavuusosamäärä. Mitä muotoa ovat kriittiset alueet tasaisesti voimakkaimmassa yksisuuntaisessa testissä?

3. Jatkoa harjoituksen 11 tehtävään 5. Johda a-kohdan mallissa Waldin testisuureen ja Raon testisuureen lausekkeet ja sovella niitä b-kohdan aineistoon.

4. (Monisteen teht. 5.15 osa.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$, jossa parametri on (μ, σ^2). Testattavana on $H_0\colon \mu = \mu_0$. Johda Waldin testisuure ja päättele, että saatava testi on yhtäpitävä tavallisen kaksisuuntaisen t-testin kanssa.

   Luennolla todettiin sama asia uskottavuusosamäärän testin osalta ja luentomonisteen kohdassa 5.7.8 Raon testin osalta.

5. (Monisteen teht. 5.16.) Eräiden kuulalaakereiden kestoa (miljoonaa kierrosta) on totuttu kuvaamaan Weibull-jakaumalla, jonka tiheysfunktio on
$$f(y;\beta,\lambda) = \lambda\beta y^{\beta-1}\exp(-\lambda y^{\beta}), \qquad y > 0,$$
ja jossa $\beta, \lambda > 0$ ovat parametreja. Testataan hypoteesia $H_0\colon \beta = 1$ eli tutkitaan, voisiko kestoa kuvata eksponenttijakaumalla. Poimitaan 23 laakerin otos ja mitataan niiden kestot:

17.88	28.92	33.00	41.52	42.12	45.60	48.48	51.84
51.96	54.12	55.56	67.80	68.64	68.64	68.88	84.12
93.12	98.64	105.12	105.84	127.92	128.04	173.40	

   Suorita testi käyttämällä uskottavuusosamäärän testisuuretta ja χ^2-approksimaatiota. [*Apu.* ”Vapaan mallin” SU-estimaatteja ei voi ratkaista suljetussa muodossa, mutta uskottavuusyhtälöt numeerisesti ratkaisemalla nähdään, että $\hat{\beta} = 2.1021$ ja $\hat{\lambda} = 9.515 \cdot 10^{-5}$.]

Huom. Tiistaina 17.2. kello 12–13 luennolla vierailee Matti Pirinen Molekyylilääketieteen instituutista ja pitää esityksen aiheesta ”geneettisten vaikutusten etsintää tilastollisten menetelmien avulla”.