Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015
Harjoitus 11 (10. ja 12. 2. 2015)

1. Pohdittavaksi ja keskusteltavaksi: Lue suomenkielisen Wikipedian artikkeli ”Tilastollisen hypoteesin testaus”: http://fi.wikipedia.org/wiki/Tilastollisen_hypoteesin_testaus (pääosin lainattu kääntöpuolella). Antaako se totuudenmukaisen kuvan tilastollisesta testaamisesta? Onko siinä virheitä, vakavia puutteita tai epäselvyyksiä? Miten itse kiteyttäisit tilastollisen testaamisen idean kurssilla opitun perusteella?

2. (Monisteen teht. 5.10.) Toistokoemallin $K \sim Bin(n, \theta)$ parametrina on $\theta \in]0, 1[$. Tarkastellaan hypoteeseja $H_0 \colon \theta = \theta_0$ ja $H_1 \colon \theta = \theta_1$, jossa $\theta_0 < \theta_1$. Osoita uskottavuusosamäärää tutkimalla eli Neyman–Pearson-apulauseen avulla, että voimakkain testi saadaan testisuureesta k. Järkeile myös, että kyseessä on tasaisesti voimakkain testi yhdistetylle vastahypoteesille $H_1 \colon \theta > \theta_0$.

   Vihje. Muokkaa uskottavuusosamäärää niin, että saat näkyviin suhteet $\theta_0/(1 - \theta_0)$ ja $\theta_1/(1 - \theta_1)$.

3. Diskreetin satunnaismuuttujan Y jakauma riippuu parametrista θ, jolla on kolme mahdollista arvoa: 0, 1 ja 2. Vastaavat pistetodennäköisyydet on esitetty taulukossa alla.

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y; 0)$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
$f_Y(y; 1)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1
$f_Y(y; 2)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3

   Nollahypoteesi on $H_0 \colon \theta = 0$. Luennolla laskettiin suhteet $f_Y(y; 1)/f_Y(y; 0)$ ja todettiin, että vastahypoteesille $H_1 \colon \theta = 1$ merkitsevyystasolla 0.1 voimakkaimman testin kriittinen alue on $\{1, 2\}$. Johda vastaavalla tavalla voimakkaimman testin kriittinen alue, jos vastahypoteesi on $H_1 \colon \theta = 2$ ja merkitsevyystaso edelleen 0.1.

4. (Jatkoa edelliseen tehtävään.) Laske kummankin testin voimafunktion arvot pisteissä $\theta = 1, 2$. Onko tässä olemassa tasaisesti voimakkainta testiä yhdistetylle vastahypoteesille $H_1 \colon \theta \in \{1, 2\}$ merkitsevyystasolla 0.1?

5. (Monisteen teht. 5.12.)

   a) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$. Johda uskottavuusosamäärän testisuureen $r(\boldsymbol{y})$ lauseke, kun testattavana on $H_0 \colon \mu = \mu_0$.

   b) Eräässä tienristeyksessä on pitkällä aikavälillä sattunut keskimäärin 7.2 onnettomuutta kuukaudessa. Risteykseen asennetaan liikennevalot. Sitä seuraavan vuoden aikana sattuu yhteensä 60 onnettomuutta. Testaa uskottavuusosamäärän testiä ja χ^2-approksimaatiota käyttämällä, voidaanko valojen asentamisen katsoa vaikuttaneen onnettomuuksien määrään. Oletetaan, että onnettomuuksien lukumäärä kuukaudessa on Poisson-jakautunut.

Huom. Tiistaina 17.2. kello 12–13 luennolla vierailee Matti Pirinen Molekyylilääketieteen instituutista ja pitää esityksen aiheesta ”geneettisten vaikutusten etsintää tilastollisten menetelmien avulla”.

Tilastollisen hypoteesin testaus

Tilastotieteelliseen tutkimukseen kuuluu hypoteesien tekeminen, ja tätä kautta tilastollisen hypoteesin testaus. Tilastollinen hypoteesi on perusjoukkoa koskeva väite, jonka todenperäisyyttä arvioidaan todennäköisyyksien avulla. Tilastollisen testin lähtökohtana on muodostaa nollahypoteesi ja vastahypoteesi. Nollahypoteesi H0 yleensä vastaa tilannetta että verrattavien perusjoukkojen välillä ei ole mitään eroja ja kaikki havaitut poikkeamat näiden välillä on vain sattumaa. Yleensä nollahypoteesi on muotoa ”ei vaikutusta” tai ”ei eroa”. Nollahypoteesin vastahypoteesi H1 on H0:n antiteesi. Yleensä vastahypoteesi on muotoa ”on vaikutusta” tai ”on eroa”. Tutkittavaa ilmiötä mallinnetaan nollahypoteesin mukaisesti ja katsotaan ovatko tämän seuraukset mielekkäitä.

Yleensä nollahypoteesi halutaan kumota, koska ”ei eroavuutta” ei pidetä kiinnostavana tuloksena. H0:aa pidetään työhypoteesina, joka valitaan testaamisen lähtökohdaksi teknisen helppoutensa takia. Mikä kuvaa, että verrattavilla perusjoukoilla ei ole mitään eroa ja kaikkien havaintojen oletetaan olevan samasta jakaumasta, mikä on teoreettisesti yksinkertaista. Jos lähtökohta johtaa epäuskottaviin tuloksiin, niin tulee epäilys nollahypoteesin mielekkyydestä ja vastahypoteesi saa tukea.

Nollahypoteesin uskottavuutta mitataan testin havaitulla merkitsevyystasolla eli P-arvolla. Perinteisesti testeissä on etukäteen asetettu ”riskitaso” α jota pienemmät P-arvot johtavat H0:n hylkäämiseen. Empiirisessä tutkimuksessa yleensä käytetty raja on 5%. Nollahypoteesin kumoavaa havaintoa kutsutaan tilastollisesti merkitseväksi.

Hypoteesin valinta

Hypoteesit aina viittaavat johonkin populaatioihin tai malleihin, eikä tiettyyn tulokseen, siksi H0 ja H1 täytyy aina esittää perusjoukon parametreina.

H1 esittää vaikutusta mihin etsitään näyttöä, siksi tämä usein valitaan ensin, H0 sen sijaan kuvaa, että haluttua vaikutusta ei tapahdu. H1:n valinta on usein vaikeampi tehtävä, sillä ei ole aina varmaa eroavatko parametrit nollahypoteesin arvosta tiettyyn suuntaan vai molempiin, eli kuuluuko vastahypoteesin olla yksi- vai kaksisuuntainen. Kuitenkin joidenkin tilastotieteilijöiden mielestä tulisi aina käyttää kaksisuuntaista vaihtoehtoa.

Vastahypoteesi ilmaisee toiveita tai epäilyjä joita viedään aineistoon. Havaittu aineisto ei saa vaikuttaa testattavien hypoteesien tai vastahypoteesien asettamiseen, vaan hypoteesit on kiinnitettävä ennen datan katselua. Näkyvän poikkeavuuden poimiminen testattavaksi rikkoo riippumattomuusperiaatetta.

Hypoteesit tilastollisessa testissä

Tilastollinen testi määrittelee merkitsevyyden aineiston näytön perusteella nollahypoteesia vastaan. Nämä neljä askelta ovat yleiset kaikille merkitsevyystesteille.

1. Määritellään nollahypoteesi H0 ja vastahypoteesi H1. Testi on luotu määrittelemään aineiston näytön avulla voimakkuus H0:aa vastaan. H1 on väite joka hyväksytään, jos näytön perusteella H0 hylätään.
2. Selvitetään aineistoa koskevat oletukset testausta varten, kuten riippumattomuus ja havaintoja kuvaava jakauma. Lasketaan aineistossa toimivan tilastollisen testin testisuure.
3. P-arvon saanti aineistolle. Tilastollisen testin p-arvo on todennäköisyys havaita nollahypoteesin mukaisessa tilanteessa vähintään yhtä poikkeava testisuureen arvo kuin mitä aineistosta on laskettu.
4. Lopputuloksen esitys. Valitaan merkitsevyyden taso α. Jos p-arvo on pienempää tai yhtäsuurta kuin α, tämä johtaa lopputulokseen, että vastahypoteesi on totta. Jos taas P-arvo on suurempaa kuin α, niin aineisto ei tarjoa riittävää näyttöä nollahypoteesin hylkäämiseen. Lopputulos on yhteenveto siitä mitä testi suureen avulla selvitettiin.

Nollahypoteesin hylkäykseen voi liittyä kahta virhettä:

- I tyypin virhe: Tosi nollahypoteesi hylätään. Sattumalta saatu hyvin epätodennäköinen otos.
- II tyypin virhe: Väärä nollahypoteesi jää hylkäämättä.