

Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015
Harjoitus 10 (3. ja 5. 2. 2015)

1. Olkoon $f_Y(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ jokin tilastollinen malli ja $H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$ siihen liittyvä hypoteesi, jota voidaan testata testisuureella $t = t(\mathbf{y})$ (suuret arvot H_0 :lle kriittisiä). Olkoon g jokin aidosti kasvava funktio, ja määritellään $u = u(\mathbf{y}) = g(t(\mathbf{y}))$. Perustele, että testisuure u on *ekvivalentti* t :n kanssa siinä mielessä, että sitä käyttämällä saadaan samat p-arvot ja samat kriittiset alueet kuin t :tä käyttämällä. (Tätä havaintoa käytetään esimerkiksi monisteen jaksossa 5.5.)
2. (Vrt. monisteen teht. 5.5.) Olkoot Y_1 ja Y_2 kaksi riippumatonta havaintoa Poissonin jakaumasta $P(\mu)$. Testataan hypoteesia $H_0: \mu = 2$ (tai $\mu \geq 2$) vastaan $H_1: \mu < 2$. Testisuureena on $T = Y_1 + Y_2 \sim P(2\mu)$.
 - a) Millaiset testisuureen arvot todistavat H_0 :aa vastaan ja H_1 :n puolesta: pienet vai suuret? Miksi?
 - b) Laske testisuureen havaittuja arvoja $t = 0$, $t = 1$ ja $t = 2$ vastaavat p-arvot.
 - c) Mitkä t :n arvot johtavat H_0 :n hylkäämiseen ja H_1 :n hyväksymiseen merkitsevyytätasolla $\alpha = 0.1$? Mitkä havaintoparit (y_1, y_2) kuuluvat vastaavaan kriittiseen alueeseen?
3. (Vrt. monisteen teht. 5.6.) Mallina on $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu, 1) \perp$. Opiskeltuasi monisteen esimerkistä 5.5.3, kuinka kaksisuuntaisen z -testin voimafunktio johdetaan, vastaa seuraaviin:
 - a) Testataan hypoteesia $H_0: \mu = 0$ vastaan $H_1: \mu > 0$ käyttämällä yksisuuntaista z -testiä merkitsevyytätasolla 0.05. Johda tämän testin voimafunktio ja hahmottele karkeasti sen kuvaajaa. Vertaa sitä kaksisuuntaisen z -testin voimaan (kuva 5.2). Miten tulkitset sen, että kaksisuuntaisen testin voima on pienempi kuin yksisuuntaisen joukossa $\mu > 0$?
 - b) Millaiseen ongelmaan tai ongelmiin törmäät, jos yrität samalla tavalla muodostaa (yksi- tai kaksisuuntaisen) t -testin voimafunktion?
Apu. Tässä ja seuraavassa tehtävässä käytä normaalijakauman taulukoita tai verkosta löytyviä laskimia, esim. <http://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx>.
4. (Vrt. monisteen teht. 5.7.) Jatkoa edellisen tehtävän a-kohtaan. Kuinka suuri on havaintojen lukumäärän n oltava, jotta yksisuuntaisen testin voima pisteessä $\mu = 0.4$ olisi ≥ 0.9 (eli hyväksymisvirheen riski ko. pisteessä ≤ 0.1)? Entä jos halutaan voiman olevan ≥ 0.95 (eli hyväksymisvirheen riskin ≤ 0.05)?
5. Jatkoa harjoituksen 9 tehtävään 5. Johda testisuureen t indusoima 0.10-tasoinen voimafunktio ja piirrä sen kuvaaja. Mikä erityisen miellyttävä mutta harvinainen piirre esiintyy tämän testin voimafunktiossa (pienillä θ :n arvoilla)?