Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015
Harjoitus 9 (27. ja 29. 1. 2015)

1. Seuraavassa on lueteltu sattumanvaraisessa järjestyksessä joitakin tilastollisen testin suorittamiseen liittyviä työvaiheita. Opiskeltuasi itsellesi uudet käsitteet luentomonisteesta, pohdi, missä järjestyksessä vaiheet tulisi suorittaa:

   a) testisuureen valinta
   b) aineistonkeruu (tai satunnaiskokeen suorittaminen)
   c) p-arvon laskeminen
   d) tilastollisen mallin määrittely
   e) merkitsevyystason asettaminen
   f) nollahypoteesin määrittely
   g) päätös nollahypoteesin hyväksymisestä/hylkäämisestä

   Onko järjestys yksikäsitteisesti määrätty? Mitkä vaiheet väistämättä riippuvat toisistaan ja mitkä taas eivät saisi riippua toisistaan? Ovatko kaikki vaiheet täysin välttämättömiä?

2. Tilastollinen malli muodostuu yhdestä havainnosta $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ja mallin parametri on (μ, σ^2). Mitkä seuraavista hypoteeseista ovat yksinkertaisia ja mitkä yhdistettyjä: a) $\sigma^2 = 1$, b) $\mu = \log \sigma^2$, c) $P(Y > 0) = \frac{1}{2}$, d) $P(Y > 0) = \frac{1}{2}$ ja $P(Y > 1) = \frac{1}{4}$. Piirrä vastaavat joukot (μ, σ^2)-koordinaatistossa.

3. (Vrt. monisteen teht. 5.2.) Kolikon harhattomuutta tutkitaan heittämällä sitä n kertaa ja kirjaamalla ylös kruunujen lukumäärä.

   a) Formuloi huolellisesti asetelmaa kuvaava malli ja nollahypoteesi. Mikä on luonnollinen testisuure ja millaiset testisuureen arvot puhuvat nollahypoteesia vastaan?

   b) Heittoja on $n = 10$ ja saadaan 3 kruunua. Laske vastaava p-arvo ja pohdi, voidaanko kolikkoa pitää harhattomana.

   c) Muuttuvatko johtopäätöksesi, jos $n = 100$ ja saadaan 30 kruunua?

   Ohje. Binomijakaumaan liittyviä todennäköisyyksiä voi laskea kätevästi netissä olevilla laskimilla, esim. http://www.jkauppi.fi/mathematics/binomial-calculator. c-kohdassa voi käyttää binomijakauman normaaliapproksimaatiota.

4. (Vrt. monisteen teht. 5.3.) Kemiantehtaassa kone annostelee erästä kemikaalia kanistereihin. Oletetaan, että kerralla annostellun kemikaalin määrä (litroina) noudattaa normaalijakaumaa. Pyrkimyksenä on säätää kone siten, että keskimääräinen annos μ on 10 ja keskihajonta σ korkeintaan 0.2. Tutkittiin 20 kanisteria ja havaittiin, että niissä oli kemikaalia keskimäärin $\overline{y} = 9.86$ (litraa), keskihajonnan ollessa $s = 0.25$. Testaa kaksisuuntaisella t-testillä ja yksisuuntaisella χ^2-testillä, onko kone säädön tarpeessa. Käytä 5 %:n merkitsevyystasoa.

   Ohje. Kertaa tarvittavat testit JTP-kurssilta. Voit myös katsoa monisteen jaksoa 5.4.

5. Olkoot Y_1 ja Y_2 kaksi riippumatonta havaintoa tasajakaumasta $\mathit{Tas}(0, \theta)$, jossa $\theta > 0$. Testataan hypoteesia $H_0\colon \theta \geq 2$ vastaan $H_1\colon \theta < 2$. Testisuureena on $T = \max(Y_1, Y_2)$.

   a) Millaiset testisuureen arvot t todistavat mielestäsi H_0:aa vastaan ja H_1:n puolesta: pienet vai suuret? Miksi?

   b) Mitkä t johtavat H_0:n hylkäämiseen ja H_1:n hyväksymiseen merkitsevyystasolla 0.10? Mitkä ovat näitä vastaavat havaintoparit (y_1, y_2) eli mikä on ns. kriittinen alue? Piirrä siitä kuva. [*Apu.* T:n jakauma on selvitetty harjoituksen 5 tehtävässä 4.]

   c) Onko olemassa sellaisia aineistoja (y_1, y_2), jollaisen havaitessasi voisit *varmuudella* sanoa, että H_0 pätee ja H_1 ei päde tai vastaavasti että H_0 ei päde ja H_1 pätee?