Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015
Harjoitus 7 (13. ja 15. 1. 2015)

1. (Monisteen teht. 3.13.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$. Mitä normaalijakaumaa su-estimaattori $\hat{\mu} = \overline{Y}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?

2. Tarkastellaan harjoituksen 3 tehtävän 1 mallia, jossa $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ja kullakin Y_i:llä on tiheysfunktio $f(y; \theta) = \theta y^{\theta-1}$, $0 \le y \le 1$. Mitä normaalijakaumaa su-estimaattori $\hat{\theta}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?

3. (Vrt. monisteen tehtävä 2.20.) Parametrilla $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ indeksoitu jakaumaperhe on d-ulotteinen *eksponenttiperhe*, jos sen yptf/ytf voidaan kirjoittaa muotoon

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}) = c(\boldsymbol{\theta}) h(\boldsymbol{y}) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{d} \phi_j(\boldsymbol{\theta}) t_j(\boldsymbol{y}) \right\},$$

   jossa $c(\boldsymbol{\theta})$ sekä $\phi_j(\boldsymbol{\theta})$:t ovat reaaliarvoisia ja riippuvat vain parametrista $\boldsymbol{\theta}$ ja vastaavasti $h(\boldsymbol{y})$ sekä $t_j(\boldsymbol{y})$:t ovat reaaliarvoisia vain aineistosta $\boldsymbol{y}$ riippuvia tunnuslukuja. Vektoria $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \phi_d(\boldsymbol{\theta}))$ kutsutaan perheen *luonnolliseksi parametriksi*.

   a) Osoita, että mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$ vastaava jakaumaperhe $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \mu)$ on yksiulotteinen eksponenttiperhe, luonnollisena parametrina $\log \mu$.

   b) Osoita, että mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$ vastaava jakaumaperhe $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \mu, \sigma^2)$ (ks. esim. monisteen kohta 1.2.3) on kaksiulotteinen eksponenttiperhe, luonnollisena parametrina $(\mu/\sigma^2, 1/\sigma^2)$. [*Ehdotus.* Aloita kirjoittamalla $(y_i - \mu)^2 = y_i^2 - 2\mu y_i + \mu^2$.]

4. Jatkoa edelliseen tehtävään. Perustele, että eksponenttiperheen määritelmässä vakio $c(\boldsymbol{\theta})$ riippuu $\boldsymbol{\theta}$:sta vain $\boldsymbol{\phi}$:n kautta. Siten perhe voidaan aina uudelleenparametroida luonnollisen parametrinsa avulla. [*Muista.* Funktiot $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta})$ ovat yhteispistetodennäköisyysfunktiota tai -tiheysfunktioita!]

5. Perustele, että jakaumaperhe $Tas(0, \theta)$, $\theta > 0$, ei ole (yksiulotteinen) eksponenttiperhe.