Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015
Harjoitus 6 (9. ja 11. 12. 2014)

1. Jatkoa harjoituksen 3 tehtävään 1: Havainnot $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on $f(y; \theta) = \theta y^{\theta-1}$, kun $0 \le y \le 1$. Etsi parametrille $\theta > 0$ estimaattori $\tilde{\theta}$ momenttimenetelmän avulla.

2. (Monisteen teht. 3.11.) Tarkastellaan mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim G(\alpha, 1/\beta) \perp\!\!\!\perp$ (ks. harj. 2, teht. 5). Johda momenttimenetelmän antamien estimaattoreiden $\tilde{\alpha}$ ja $\tilde{\beta}$ lausekkeet
$$\tilde{\alpha} = \frac{\overline{Y}^2}{\tilde{\sigma}^2}, \qquad \tilde{\beta} = \frac{\tilde{\sigma}^2}{\overline{Y}},$$
jossa $\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2/n$.

3. Jatkoa harjoituksen 4 tehtävään 5: Tarkastellaan Poisson-regressiomallia, jossa $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ja $Y_i \sim P(\beta x_i)$. Laske su-estimaattorin
$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$
varianssi. Päättele, että $\hat{\beta}$ on tarkentuva, jos $x_i \ge c$ kaikilla i, jossa $c > 0$ on jokin kiinteä vakio. Mahtaisiko $\hat{\beta}$ olla tarkentuva, jos $x_i = 1/2^i$ kaikilla i (tarkkaa perustelua ei vaadita)?

4. Totea, että edellisen tehtävän mallissa myös estimaattori
$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}$$
on harhaton, ja laske sen varianssi. Kumpi estimaattoreista T ja $\hat{\beta}$ on tehokkaampi? Miten niiden varianssit suhtautuvat informaatioepäyhtälön antamaan alarajaan $1/i(\beta)$? Muista, että $x_i > 0$ kaikilla i. (Vihje kääntöpuolella.)

5. (Monisteen teht. 2.19.) Satunnaismuuttujan Y tiheysfunktio on muotoa
$$f_Y(y; \theta) = c(y) \exp\{\theta y - h(\theta)\}$$
ja se on säännöllinen. Laske $E_\theta(Y)$ ja $\mathrm{var}_\theta(Y)$ funktion h ensimmäisen ja toisen derivaatan avulla käyttämällä hyväksi säännöllisen mallin erikoispiirteitä (ks. monisteen jakso 2.5).

Huom. Tietoa kurssikokeesta yms. kurssin kotisivulla.

Vihje tehtävään 4:

Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön mukaan pätee $\left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)$. Valitse siinä $a_i^2 = x_i$ ja $b_i^2 = 1/x_i$.