Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015
Harjoitus 2 (11. ja 13. 11. 2014)

1. Jatkoa harjoituksen 1 tehtävään 2.

   a) Mikä on havaintoa $Y_1 = 4$ vastaava uskottavuusfunktio? Entä su-estimaatti θ:lle?

   b) Mikä on havaintoparia $(Y_1, Y_2) = (4, 1)$ vastaava uskottavuusfunktio? Entä su-estimaatti θ:lle? Oletetaan aikaisemmassa tehtävässä kerrotun lisäksi, että $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$.

2. (Monisteen teht. 2.2.) Olkoot $y_1, \ldots, y_n$ ja a mielivaltaisia reaalilukuja. Varmista, että

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 + n(\overline{y} - a)^2,$$

   kun $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$. [Tulosta käytettiin normaalijakaumamallin uskottavuusfunktion muodostamisessa, ks. monisteen kohta 2.1.4.]

3. (Monisteen teht. 2.3.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathit{Exp}(\lambda) \perp\!\!\!\perp$. Kirjoita vastaava tilastollisen mallin lauseke (ytf). Muodosta sitten aineistoa $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vastaavat uskottavuus- ja log-uskottavuusfunktio sekä määritä huolellisesti perustellen parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaatti. Hahmottele log-uskottavuusfunktion kuvaajaa.

4. (Monisteen teht. 2.6.) Olkoon mallina $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathit{Tas}(\theta, \theta + 1) \perp\!\!\!\perp$. Johda aineistoa $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vastaava uskottavuusfunktio ja totea, että se saa suurimman arvonsa jokaisessa välin $\big(y_{(n)} - 1, y_{(1)}\big)$ pisteessä, kun merkitään $y_{(1)} = \min(y_1, \ldots, y_n)$ ja $y_{(n)} = \max(y_1, \ldots, y_n)$. Siten su-estimaatti $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$ ei ole yksikäsitteinen (todennäköisyydellä yksi).

   Mitä mahtaa tapahtua välin $\big(y_{(n)} - 1, y_{(1)}\big)$ pituudelle, kun havaintojen lukumäärä $n \to \infty$?

5. (Monisteen teht. 2.8.) Tarkastellaan riippumatonta otosta gammajakaumasta: $Y_1, \ldots, Y_n \sim G(\alpha, 1/\beta) \perp\!\!\!\perp$, jossa $\alpha, \beta > 0$.

   a) Parametrina on (α, β). Totea, että uskottavuusyhtälöt voidaan saattaa muotoon

$$\begin{cases} \log\alpha - \psi(\alpha) = \log\overline{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log y_i, \\ \qquad\qquad \beta = \overline{y}/\alpha, \end{cases}$$

   jossa $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ on ns. *digammafunktio*. Yhtälöitä ei voi ratkaista suljetussa muodossa.

   b) Parametrina on vain β, ja α on tunnettu luku. Mikä on β:n su-estimaatti?

Huom. Tässä esiintyvien jakaumien tiheysfunktioiden lausekkeet löytyvät monisteen lopussa olevasta liitteestä.