Stationaariset aikasarjat sl 2014, HT 2, viikko 38

1. Tarkastellaan prosessia $y_t = x_t + w_t$, jossa $w_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \tau^2\right)$ ja x_t on AR(1)-prosessi $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, $|\phi| < 1$. Oletetaan lisäksi, että $w_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_s$ kaikilla t, s. Osoita, että y_t on heikosti stationaarinen ja johda sen autokovarianssifunktio.

2. Tarkastellaan ei-kausaalista AR(1)-prosessia $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, jossa $|\phi| > 1$. Johda prosessin y_t autokovarianssifunktio.

Vihje: Voit käyttää monisteen s. 16 todettua tulosta, jonka mukaan y_t:llä on lineaarinen esitys $y_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} \varepsilon_{t+j}$, ja monisteen s. 13 johdettua yleisen lineaarisen prosessin autokovarianssifunktion lauseketta.

3. Tarkastellaan stationaarista ARMA(1,1)-prosessia $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},\ \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, $|\phi| < 1$. Esitä y_t:n MA(∞)-esityksen suotimen $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = (1 + \theta B) / (1 - \phi B)$ kertoimet ψ_j parametrien ϕ ja θ funktioina. Mitä tapahtuu kertoimille ψ_j ja prosessin y_t autokovarianssifunktiolle, kun $\phi = -\theta$?

Vihje: Kirjoita yhtälö $\psi(B) = (1 + \theta B) / (1 - \phi B)$ "sopivasti" vaihtoehtoisella tavalla ja käytä hyväksesi tietoa, että kaksi potenssisarjaa on samoja, jos niiden kaikki kertoimet ovat samoja.

4. Tarkastellaan satunnaiskulkua $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, ...$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$ ja (yksinkertaisuuden vuoksi) $y_0 = 0$ (ks. monisteen s. 16). Totea, että

$$\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (T - t + 1) \varepsilon_t$$

ja osoita tämän avulla tulokset $\mathsf{E}(\bar{y}) = 0$ ja $\mathsf{Var}(\bar{y}) \to \infty$, kun $T \to \infty$. Päättele tästä edelleen, että otoskeskiarvo $\bar{y}$ ei estimoi havaintojen odotusarvoa ($= 0$) tarkentuvasti. (Viimeisessä kohdassa ei tarvitse esittää tarkkaa matemaattista todistusta.)

Huom.: Tämä tehtävä osoittaa, että tavanomainen suurten lukujen laki ei päde satunnaiskulun tapauksessa, mikä on yksi syy sille, että satunnaiskulun kaltaiset epästationaariset prosessit vaativat oman teoriansa (vrt. otoskeskiarvon tarkentuvuus jakson 2.4 stationaarisessa tapauksessa).