

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi, Syksy 2014
Harjoitus 5
6.-10.10. 2014

Näissä harjoituksissa on 8 tehtävää, joten tekemällä kaikki voit saada kaksi **ylimääräistä** pistettä (kurssin läpäisyyn vaadittavat 2/3 lasketaan edelleen 36:sta tehtävästä).

1. Tiedetään, että $x + y = 12$. Etsi luvut x ja y siten, että niiden neliöiden summa $x^2 + y^2$ on pienin mahdollinen.
2. Osoita induktiolla, että kaava

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$.

3. Todista induktiolla seuraava epäyhtälö: Kun $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, niin

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

4. Laske seuraavat summat

a) $\sum_{i=1}^5 iv$ b) $\sum_{k=3}^{20} 12$ c) $\sum_{j=0}^5 \frac{2j+1}{j+1}$

5. Lasse on ollut töissä eräässä elektroniikkakaupassa vuodet 2006-2012. Aloittaessaan työt Lassen kuukausipalkka oli 2100 euroa. Sopimuksen mukaan hänen palkkansa nousi vuosittain 1,5%. Kuinka paljon Lassen kuukausipalkka oli vuonna 2012? Entä kuinka paljon Lasse tienasi yhteensä näiden 7 vuoden aikana?
6. *i)* Kirjoita seuraavien jonojen yleinen termi (eli n . termi).
 - a) 1, 3, 5, 7, 9, ...
 - b) 6, 11, 16, 21, 26, ...
 - c) 11, 13, 15, 17, 19, ...*ii)* Kirjoita seuraavien kaavojen määrittelemien jonojen 5 ensimmäistä termiä

d) $\frac{n}{n+1}$

e) $n^2 + 1$

f) $\frac{1}{2^n}$.

7. a) Aritmeettisen jonon toinen termi on 5 ja kolmas termi 9. Mikä on jonon 73. termi?

b) Geometrisen jonon toinen termi on 2 ja kolmas termi 0,5. Mikä on jonon 16. termi?

8. Todista induktiolla geometrisen jonon summakaava, eli jos a_1, a_2, \dots on geometrinen jono, jonka peräkkäisten termien suhde on q , niin tällöin

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$