

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 6

1. Näytä (käyttämättä täydellisyyslausetta), että $\vdash \forall v_0(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\forall v_0\phi \wedge \forall v_0\psi)$.
2. Näytä, että $\not\vdash \forall v_0\exists v_1 R(v_0, v_1) \rightarrow \exists v_1 R(v_1, v_1)$.
3. Olkoon $L = \emptyset$. Näytä, että jos L -kaavasta ϕ ei löydy merkkiä \neg , niin kaavassa ϕ on pariton määrä merkkejä. Tehtävässä muuttujasymbolit v_i lasketaan yhdeksi merkiksi (esim. kaavassa $(v_0 = v_1 \rightarrow v_0 = v_2)$ on 9 merkkiä).
4. Olkoon \mathbf{R} reaalilukujen joukko ja $E \subseteq \mathbf{R}^2$ Vitalin ekvivalenssirelaatio eli $(a, b) \in E$ jos $a-b$ on rationaaliluku. Mitkä ovat struktuurin (\mathbf{R}, E) määriteltävät osajoukot?
5. Oletetaan, että vakiosymboli $c \in L$ ei esiinny L -teorian T lauseissa, ϕ on L -kaava jossa ei esiinny vakiosymbolia c ja että $T \vdash \phi(c/v_0)$. Näytä, että $T \vdash \forall v_0\phi$.
6. Sanotaan, että teoria T on \aleph_0 -kategorinen, jos sillä on numeroituvasti äärettömän malli ja sen kaikki numeroituvasti äärettömät mallit ovat keskenään isomorfisia. Etsi \aleph_0 -kategorinen teoria joka ei ole täydellinen.