Matemaattinen logiikka

Harjoitus 8

1. Olkoon $M = (M, R^M)$, missä $M = \{(a,b) |\ a, b \in \mathbb{N},\ a \leq b\}$ ja $((a,b),(c,d)) \in R^M$ jos $b = d$. Näytä, että $Th(M)$ ei ole $\aleph_0$-kategorinen.

2. Olkoon $M = (\mathbb{N}^2, R^M)$, missä $((a,b),(c,d)) \in R^M$ jos $b = d$ ja $N = (\mathbf{R}^2, R^N)$, missä ($\mathbf{R}$ on reaalilukujen joukko ja) jälleen $((a,b),(c,d)) \in R^M$ jos $b = d$. Näytä, että M ja N ovat elementtaarisesti ekvivalentit.

3.Olkoon T $\{f\}$-teoria, joka koostuu lauseesta

$\forall v_0((\neg f(v_0) = v_0) \wedge f(f(v_0)) = v_0)$

sekä jokaisella $n \in \mathbb{N}$ lauseesta

$\forall v_0 ... \forall v_n \exists v_{n+1} \bigwedge_{i \leq n} \neg v_i = v_{n+1}$.

Näytä, että T on täydellinen. (Vihje: Näytä ensin, että jokaisesta T:n mallista M löytyy $X \subseteq M$ s.e. $f^M \restriction X$ on bijektio $X \to (M - X)$.)

4. Näytä, että funktiot $c(y, x) = x^y$ ja $C_k(x) = k,\ k \in \mathbb{N}$, ovat primitiivirekursiivisiä.

5. Näytä, että funktio $min(x_1, ..., x_n)$ = pienin luvuista $x_1, ..., x_n$ on primitiivirekursiivinen.

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on vähenevä (eli $f(n) \leq f(m)$ kun $n \geq m$). Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.