Matemaatinen Logiikka

Harjoitus 2

1. Näytä, että $\vdash ((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$.

2. (i) Näytä, että $\{(p_0 \to p_1)\} \nvdash (p_1 \to p_0)$.
(ii) Näytä, että jos $\{(A \to B)\} \vdash (B \to A)$, niin $\vdash (B \to A)$ (täydellisyyslausetta saa käyttää).

3. Olkoon $X \subseteq \mathbb{N}$ ja $S = \{p_i | \ i \in X\} \cup \{\neg p_i | \ i \in \mathbb{N} - X\}$. Näytä, käyttämättä täydellisyyslausetta, että S on täydellinen. Lausetta 2.11 saa käyttää. Vihje: Tehtävä 1.

4. Ovatko struktuurit $(\mathbf{Z}, +)$ ja $(\mathbf{Q}, +)$ isomorfiset?

5. Olkoon $S : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ sellainen, että $S(z) = z + 1$ kaikilla $z \in \mathbf{Z}$. Näytä, että struktuurin $(\mathbf{Z}, S)$ automorfismiryhmä $(Aut((\mathbf{Z}, S)), \circ)$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbf{Z}, +)$ kanssa.

6. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, olkoon $N_n \in \mathbb{N}$, $f_n : \{0, ..., N_n\} \to \{0, 1\}$ ja S_n niiden totuusjakaumien $v : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ joukko joilla $v(k) = f_n(k)$ jollain $k \leq N_n$. Näytä, että jos kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n=0}^{m} S_n \neq \emptyset$, niin $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \neq \emptyset$. Vihje: Etsi propositiologiikan lauseet A_n niin että $v(A_n) = 1$ joss $v \in S_n$ ja käytä propositiologiikan kompaktisuuslausetta.