Matemaattinen logiikka

Harjoitus 10

1. Olkoot M^* ja M kuten harjoitusten 9 tehtävässä 6. Näytä, että jokainen M^*:ssä määriteltävä relaatio on määriteltävä jo M:ssä.

2. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^2$ relaatio, jolla on seuraava ominaisuus: Kaikilla primitiivirekursiivisilla $S \subseteq \mathbb{N}$ löytyy $n \in \mathbb{N}$ niin, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $m \in S$ jos ja vain jos $(n, m) \in R$. Näytä, että R ei ole primitiivirekursiivinen.

3. Näytä, että ääretön $R \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos ja vain jos on olemassa aidosti kasvava rekursiivinen funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla $R = \{f(n)|\ n \in \mathbb{N}\}$.

4. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^2$ rekursiivinen relaatio jolla kaikilla $n \in \mathbb{N}$ löytyy vähintäin $n + 1$ alkiota $m \in \mathbb{N}$ joilla $(n, m) \in R$. Näytä, että löytyy rekursiivinen injektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jolla $(n, f(n)) \in R$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

5. Todista:
   (i) $A(y, x + 1) > A(y, x)$,
   (ii) $A(y + 1, x) \geq A(y, x + 1)$,

6. Todista:
   (i) $A(y, x) \geq y + x$,
   (ii) $A(y + 1, x) \geq A(y, yx)$.