Matemaatinen Logiikka

Harjoitus 5

1. Olkoon $\phi = \forall v_0(\exists v_1 R(v_1, v_2) \to \forall v_2(R(v_1, v_2) \to R(v_0, v_2)))$. Päteekö
   (a) $SMK(f(v_2, v_1), v_0, \phi)$,
   (b) $SMK(f(v_0, v_0), v_2, \phi)$,
   (c) $SMK(f(v_0, v_1), v_1, \phi)$?

2. Olkoon Σ joukko kaavoja, ϕ kaava ja ψ lause. Näytä, että jos $\Sigma \vdash \phi$ niin $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \phi$.

3. Olkoot t, u ja w termejä. Näytä, että $\vdash (t = u \wedge u = w) \to t = w$.

4. Näytä, että $\vdash \forall v_0(\phi \vee \psi) \to (\forall v_0 \phi \vee \psi)$, kun v_0 ei esiinny ψ:ssä vapaana.

5. Näytä, että $\{\forall v_0 \forall v_1(v_0 = v_1)\} \vdash \exists v_0 P(v_0) \to \forall v_1 P(v_1)$.

$SMK(t, v_i, \phi)$ pätee jos:
   (i) ϕ atomikaava: aina
   (ii) $\phi = \neg\psi$: jos $SMK(t, v_i, \psi)$ pätee,
   (iii) $\phi = \psi \to \theta$: jos $SMK(t, v_i, \psi)$ ja $SMK(t, v_i, \theta)$ pätevät,
   (iv) $\phi = \forall v_k \psi$: jos v_i ei esiinny vapaana ϕ:ssä tai v_k ei esiinny t:ssä ja $SMK(t, v_i, \psi)$ pätee.

6. Näytä, että jos $SMK(t, v_i, \phi)$ pätee, v_k ei esiinny ϕ:ssä ja $k \neq i$, niin $SMK(t(v_k/c), v_i, \phi(v_k/c))$ pätee, missä $t(v_k/c)$ on termi joka on saatu t:stä korvaamalla jokainen c:n esiintymä v_k:lla ja $\phi(v_k/c)$ määritellään vastaavasti.