

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 12

1. Olkoon $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiivinen. Näytä, että löytyy L_{exp} -lause ψ jolla $\mathcal{N}_{exp} \models \psi$ joss on olemassa $n \in \mathbb{N}$ jolla $f(\lceil \psi \rceil, n) = \lceil \psi \rceil$.

2. Näytä, että jokainen ääretön rekursiivisesti numeroituva joukko sisältää ääretömän rekursiivisen joukon.

3. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen relaatio. Näytä, että relaatio

$$\forall z \leq x \exists y R(x, y, z)$$

on rekursiivisesti numeroituva.

4. Olkoon $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiivinen ja A niiden $n \in \mathbb{N}$ joukko joilla on olemassa $> n$ monta sellaista $m \in \mathbb{N}$, että $f(m) = n$. Näytä, että A on rekursiivisesti numeroituva.

5. Näytä, että joukko

$$\{\lceil \phi \rceil \mid PA_{exp} \not\models \phi, PA_{exp} \not\models \neg \phi, \phi \text{ } L_{exp} \text{-lause}\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva.

6. Olkoon $L = L_{exp} - \{exp\}$. Näytä, että

$$\{\lceil \phi \rceil \mid (\mathbf{R}, +, \times, 0, 1) \models \phi, \phi \text{ on } L\text{-lause}\}$$

on rekursiivinen joukko. Tehtävässä saa käyttää tietoa, että löytyy L -teoria T (reaalisuljettujen kuntien teoria) jolle pätee:

- (i) $(\mathbf{R}, +, \times, 0, 1) \models T$,
- (ii) $\{\lceil \phi \rceil \mid \phi \in T\}$ on primitiivirekursiivinen.
- (iii) T on täydellinen.