

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

2.12.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Tarkista kaverin tehtävä

Tehtävä 2

- ▶ Onko vastaus oikein?
- ▶ Ovatko perustelut oikein? Ovatko kaikki siinä käytetyt merkinnät oikeita? (Esim. matriisit ja vektorit eivät mene sekaisin, joukkosulkuja on siellä missä pitääkin olla.)
- ▶ Eteneekö ratkaisu johdonmukaisesti? Onko ratkaisua helppo lukea?

Käytännön asioita

- ▶ Jos tarvitset pidennetyn koeaja, ota yhteyttä mahdollisimman pian.
- ▶ Jos et pääse kurssikokeeseen, voit suorittaa kurssin yleisentissä. Ohjeet löytyvät kurssisivulta.
- ▶ Avaa joulukalenterin luokkuja kurssisivulla!

Etsi itsellesi pari

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

Lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ensin kiertää tason vektoreita 90° astetta myötäpäivään ja sitten projisoi ne suoralle $\text{span}((-1, -1))$.

(c) Lineaarikuvauksella L on vain yksi ominaisarvo ja se on 0.

Ydin kertoo injektiivisyydestä

Lause

Lineaarikuvaus $L: V \rightarrow U$ on injektio, jos ja vain jos $\text{Ker } L = \{\bar{0}\}$.

- ▶ Lineaarikuvaus on injektio, jos ja vain jos nollavektorille kuvautuu ainoastaan nollavektori.

Selittävä lukutapa

Väite: Jos $\text{Ker } L = \{\bar{0}\}$, niin L on injektio.

Todistus:

- 1 Oletetaan, että $\text{Ker } L = \{\bar{0}\}$.
- 2 Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $L(\bar{v}) = L(\bar{w})$.
- 3 Tällöin $L(\bar{v}) - L(\bar{w}) = \bar{0}$ ja edelleen $L(\bar{v} - \bar{w}) = \bar{0}$.
- 4 Siten $\bar{v} - \bar{w} \in \text{Ker } L$.
- 5 Nyt pätee $\bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$, mistä seuraa $\bar{v} = \bar{w}$.
- 6 Siten L on injektio.

Keskustele parisi kanssa

- ▶ Jos virke sisältää oletuksia, miksi niitä on tehty?
- ▶ Jos virke sisältää väitteitä, mihin ne perustuvat? Nojautuvatko ne kenties määritelmiin, lauseisiin tai todistuksessa aiemmin todettuihin asioihin?
- ▶ Mikä on virkkeen keskeinen idea?
- ▶ Jos jokin askel on ristiriidassa oman käsityksesi kanssa tai et ymmärrä sitä, kirjaa asia muistiin.

Mikä on paras luonnehdinta isomorfismille?



Lineaarikuvaus $L: V \rightarrow U$ on isomorfismi, jos ja vain jos

- (a) se on bijektio.
- (b) se on injektio ja surjektio.
- (c) $\text{Ker } L = \{\bar{0}\}$ ja $\text{Im } L = U$.
- (d) Vektoriavaruuksien välillä oleva isomorfismi tarkoittaa sitä, että avaruudet ovat käytännössä samanlaiset.

Geometriaa

- ▶ Miltä näyttävät avaruuden \mathbb{R}^2 vektorit, jotka ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa?
- ▶ Piirrä joukko, jossa ovat kaikki ne avaruuden \mathbb{R}^2 vektorit, joiden normi on yksi.

Pistetulon avulla voidaan puhua avaruuden geometrisista ominaisuuksista.

Vektoriavaruuteen \mathbb{R}^2 voidaan määritellä sisätulo asettamalla

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + (v_2 w_2)/4.$$

- ▶ Miltä näyttävät nyt avaruuden \mathbb{R}^2 vektorit, jotka ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa?
- ▶ Piirrä joukko, jossa ovat kaikki ne avaruuden \mathbb{R}^2 vektorit, joiden normi on yksi.