Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

25.11.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Tarkista kaverin tehtävä

Tehtävä 3

- Onko vastaus oikein?
- Onko ratkaisussa perusteltu, mistä matriisi tuli?
- Ovatko perustelut pitävät?
- Eteneekö ratkaisu johdonmukaisesti? Onko ratkaisu selkeä?

Tehtävä 10

- Sanotaanko ratkaisussa sama asia kuin ratkaisuehdotuksen versiossa? (Sen ei tietenkään tarvise olla täsmälleen samanlainen.)
- Ymmärrätkö selityksen? Onko se selkeä?

Kuinka lukea kurssimateriaalia

- Viikko 1
  - Älä yritä ymmärtää kaikkea.
  - Anna harjoitustehtävien ohjata lukemistasi.
- Viikko 2
  - Lue teksti uudelleen huolellisemmin.
  - Mieti, mitä harjoitustehtävien on tarkoitus opettaa sinulle kurssimateriaalin sisällöstä.
  - Yritä yhdistää lukemasi siihen, mitä luennoilla on puhuttu.
- Viikon 2 jälkeen
  - Tarkista tarvittaessa asiat, jotka olet unohtanut.
  - Palaa uudelleen kaikkein hankalimpiin kohtiin. Todennäköisesti ymmärrät niistä nyt enemmän.
  - Muista, että usein asiat aukeavat vasta ajan kanssa.

Tällä tavoin matemaatikko lukee matemaattista tekstiä.

Etsi itsellesi pari

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Kumpi ratkaisu on mielestäsi parempi?

Tehtävä: Osoita, että kuvaus $L \colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}$, $L(a) = ax^2 - a$ on lineaarinen.

Ratkaisu 1:
Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned} L(a+b) &= (a+b)x^2 - (a+b) \\ &= ax^2 - a + bx^2 - b \\ &= L(a) + L(b) \end{aligned}$$

ja

$$L(ra) = (ra)x^2 - (ra) = r(ax^2 - a) = rL(a).$$

Siten L on lineaarikuvaus.

Ratkaisu 2:

On osoitettava, että

(a) $L(a+b) = L(a) + L(b)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja

(b) $L(ra) = rL(a)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$.

Koska

$$\begin{aligned} L(a+b) &= (a+b)x^2 - (a+b) \\ &= ax^2 - a + bx^2 - b \\ &= L(a) + L(b) \end{aligned}$$

ja

$$L(ra) = (ra)x^2 - (ra) = r(ax^2 - a) = rL(a),$$

kuvaus L on lineaarinen.

Lineaarikuvauksen matriisi

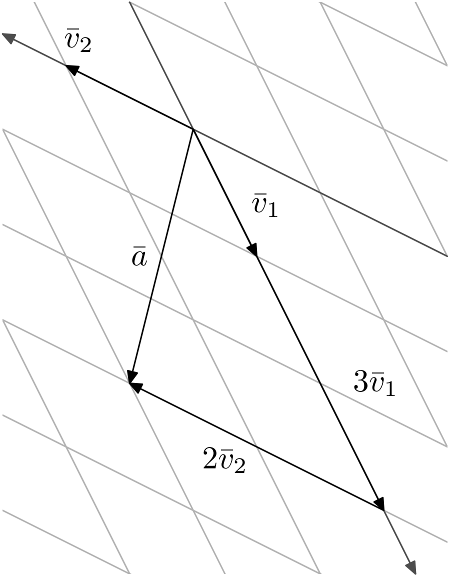
Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ensin kiertää tason vektoreita 270° astetta myötäpäivään ja sitten projisoi ne suoralle $\mathrm{span}((-3, 1))$.

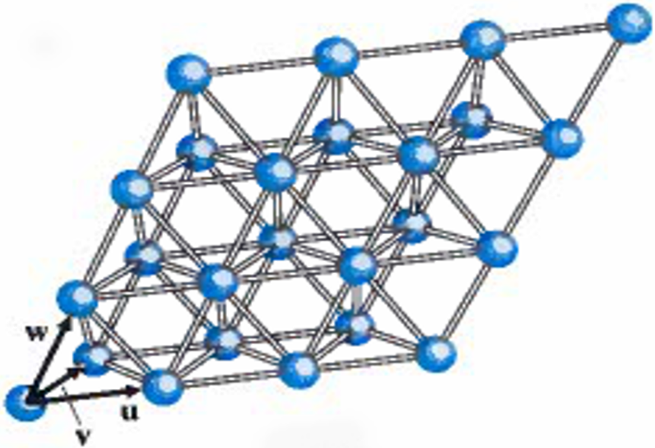
Miten ryhtyisit määrittämään kuvauksen matriisia?

Vektori $\bar{a} = (-1, -4)$.

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, -2)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 1)$.

Nyt $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.


$\bar{v}_2$
$\bar{v}_1$
$\bar{a}$
$3\bar{v}_1$
$2\bar{v}_2$


w
v
u

Kannanvaihto

Määritetään kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ luonnolliseen kantaan $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Muistutus: $\bar{v}_1 = (1, -2)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 1)$.