Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

18.11.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Palautekyselyn antia

Palaute: Olisi hyvä, jos tarkistettaisiin enemmän kuin yksi tehtävä viikossa.

Vastaus: Emme valitettavasti ehdi tarkistaa enempää tehtäviä. Tarkistettava tehtävä valitaan niin, että siinä käyvät ilmi yleisimmät virhekäsitykset ja -merkinnät.
Tällä viikolla voit tarkistaa kaverisi tehtävät tarkistusohjeiden avulla. (Siis ne tähtitehtävät, joita ohjaajat eivät tarkistaneet.)

Tarkista kaverin tehtävä

Tehtävä 2

- Tarkista, että vastaus on oikein. (Kyseessä ei ole lineaarikuvaus.)
- Todistuksessa pitää olla **konkreettinen vastaesimerkki**.
- Vastaesimerkkitodistuksessa ei kuulu olla oletuksia. (Esim. fraasi "Oletetaan, että $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$." on tarpeeton.)

Tehtävä 11

- Tarkista, että vastaus on oikein. (Ainoastaan a-kohdassa on järkeä, ja sen vastaus on $(-2, -8, -6)$.).
- Pitää löytyä perustelut sille, että muut kohdat eivät ole mielekkäitä.
- Onko vastausta vaivatonta lukea? Eteneekö se loogisesti?
- Onko selityksissä käytetty kokonaisia suomen kielen lauseita?

Käsitekartta

Etsi itsellesi pari

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Tulos

Oletetaan, että avaruuden V dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono on vapaa ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.

Tulos

Oletetaan, että avaruuden V dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono on vapaa ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.

Osoitetaan, etttä $((-2,1,1),(1,1,1),(0,1,-1))$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

Vapautta tutkittaessa päädytään yhtälöryhmään, jota vastaava matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Se saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Koska ratkaisuja on vain yksi, jono on vapaa.

Virittämistä tutkittaessa päädytään yhtälöryhmään, jota vastaava matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 1 & -1 & a_2 \end{array}\right].$$

Edellisten laskujen nojalla tiedetään, että matriisi saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right].$$

Viivan vasemmalla puolella olevista alkioista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisu. Siten vektorit virittävät avaruuden.

Lineaarikuvaus

Tutkitaan kuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad L(a,b,c) = (a - b - 4c,\ 12a + 4c,\ -3a - 7b,\ a).$$

- Etsi matriisi, joka määrää kuvauksen L. Kuinka monella eri tavalla osaat tehdä sen?
- Onko kuvaus L lineaarinen?

Mitkä väitteistä ovat tosia?

(a) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L(1,0) = (2,2,2)$ ja $L(-2,0) = (1,1,1)$.

(b) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L(1,0) = (2,2,2)$ ja $L(0,1) = (6,6,1)$.

(c) Oletetaan, että kuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pätevät seuraavat ehdot:

$$L(1,0) = (2,2,2), \quad L(0,1) = (6,6,1),$$

$$L(1,1) = (8,8,3), \quad L(2,0) = (4,4,4).$$

Tällöin kuvaus L on lineaarinen.

(d) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L(1,-1) = (2,2,2)$.

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.