Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

11.11.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Kurssimonisteita (osa 1 ja 2) on vielä jäljellä. Voit tulla ostamaan sellaisen luennon jälkeen.

Kurssipalautteen antia

- Ruuhka-aikoina ei ole riittävästi ohjaajia. -> Mihin aikoihin ohjaajia tarvittaisiin lisää? Kerro Presemossa tai suullisesti.
- Olisi hyvä, että ohjaus jatkuisi myöhempään. -> Valitettavasti sitä on vaikea järjestää ohjaajien aikataulujen vuoksi. JYMiin lisättiin kesvikiikolle ohjausta kello seitsemään asti.
- Voisiko myös aamulle saada ohjausaikoja? -> Aamulla on tarjolla Ratkomo-ohjausta. Kerro, jos haluaisit lisää aamuaikoja Ratkomoon.

presemo.helsinki.fi/joh

Uutisia työelämästä

Etsi itsellesi pari

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Kumpi ratkaisuista on mielestäsi parempi?

Tehtävä: Kuuluuko matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ aliavaruuteen

$$W = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)?$$

Ratkaisu 1: Huomataan, että

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koska A on virittäjävektoreiden lineaarikombinaatio, se on aliavaruuden W alkio.

Ratkaisu 2: Tutkitaan, onko yhtälöllä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ratkaisuja. (Tässä $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$).

Yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 + v_2 & 0 \\ v_2 - v_3 & 2v_1 \end{bmatrix}$$

ja tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 &= 1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 1 - 2v_1 \Leftrightarrow v_2 = 1 - 1 = 0 \\ v_2 - v_3 &= 4 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -4 \\ 2v_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Koska ratkaisu löytyy, on A aliavaruuden W alkio.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

$$
\begin{cases}
2v_1 + v_2 &= 1 \qquad \Rightarrow \quad v_2 = 1 - 2v_1 \Leftrightarrow v_2 = 1 - 1 = 0 \\
v_1 + v_2 &= 2 \\
v_2 - v_3 &= 4 \qquad \Rightarrow \quad v_3 = -4 \\
2v_1 &= 1 \qquad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{2}
\end{cases}
$$

Totta vai tarua?

Jos

$$
\begin{cases}
2v_1 + v_2 &= 1 \\
v_1 + v_2 &= 2 \\
v_2 - v_3 &= 4 \\
2v_1 &= 1,
\end{cases}
$$

niin $v_1 = 1/2$, $v_2 = 0$ ja $v_3 = -4$.

Kelpuutatko ratkaisun?

Tehtävä: Osoita, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$ ei ole lineaarinen.

Ratkaisu: Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} L(\bar{v} + \bar{w}) &= L(v_1 + w_1,\ v_2 + w_2) = ((v_1 + w_1)(v_2 + w_2),\ 0) \\ &= (v_1 v_2 + v_1 w_2 + w_1 v_2 + w_1 w_2,\ 0). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$L(\bar{v}) + L(\bar{w}) = (v_1 v_2, 0) + (w_1 w_2, 0) = (v_1 v_2 + w_1 w_2,\ 0).$$

Koska $(v_1 v_2 + v_1 w_2 + w_1 v_2 + w_1 w_2,\ 0) \neq (v_1 v_2 + w_1 w_2,\ 0)$, kuvaus L ei ole lineaarinen.

Lineaarikuvaus

Määritelmä

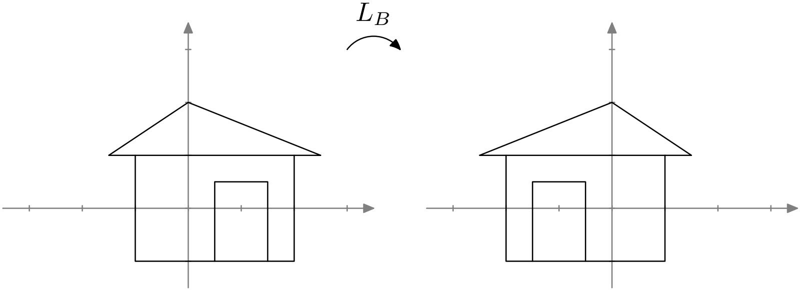
Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Matriisin määräämä lineaarikuvaus

Matriisin $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ määräämä lineaarikuvaus:



Selittävä lukutapa

Lause

Olkoon A on $m \times n$-matriisi. Matriisin A määräämä kuvaus $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$ on lineaarikuvaus.

Todistus.

1. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$.
2. Nyt pätee
$$L_A(\bar{v} + \bar{w}) = A(\bar{v} + \bar{w}) = A\bar{v} + A\bar{w} = L_A(\bar{v}) + L_A(\bar{w}).$$
3. Lisäksi pätee
$$L_A(c\bar{v}) = A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = cL_A(\bar{v}).$$
4. Siten L_A on lineaarinen.

$\square$